



TITLE:

# 超対称量子力学とその拡張

AUTHOR(S):

山田, 吉英

---

CITATION:

山田, 吉英. 超対称量子力学とその拡張. 物性研究 2008, 90(6): 773-824

ISSUE DATE:

2008-09-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/142662>

RIGHT:

# 超対称量子力学とその拡張<sup>\*)</sup>

山田吉英<sup>\*\*)</sup>

京都大学大学院人間・環境学研究科

(2008 年 4 月 21 日受理)

## Contents

<b>1. 超対称量子力学</b>	<b>775</b>
1.1. 超対称量子力学	775
1.1.1. 絡合関係式	775
1.1.2. スーパーポテンシャル	776
1.1.3. 鏡映超対称	777
1.1.4. 絡合子の積とハミルトニアン	777
1.1.5. 絡合子のゼロモードと基底状態の“消失”	778
1.1.6. Riccati 方程式	780
1.1.7. 散乱問題	782
1.1.8. 超対称代数	783
1.2. 具体例	783
1.2.1. 束縛問題の例 — 無限井戸	783
1.2.2. Riccati 一般解の例 — Abraham-Moses-Pursey ポテンシャル	785
1.2.3. 散乱問題の例 1 — デルタポテンシャル	786
1.2.4. 散乱問題の例 2 — 無反射ポテンシャル	788
<b>2. 形状不変性</b>	<b>791</b>
2.1. 固有値問題の解法	791
2.2. 例題	794
2.2.1. 調和振動子	794
2.2.2. Eckart ポテンシャル	795
2.2.3. Morse ポテンシャル	797
2.2.4. Pöschl-Teller ポテンシャル	799
2.2.5. 三角 Rosen-Morse ポテンシャル	801
2.2.6. 双曲 Rosen-Morse ポテンシャル	803
2.2.7. 水素原子	806
<b>3. 多重超対称系</b>	<b>808</b>
3.1. 2 重超対称系	808
3.1.1. 2 重超対称系の直接的構成法	808
3.1.2. 2 次絡合子の積とハミルトニアン	809
3.1.3. 2 次絡合子のゼロモードと準位消失	810
3.1.4. 可約 2 重超対称系	812
3.1.5. 可約 2 重超対称系における 2 次絡合子の積	814
3.1.6. 可約 2 重超対称系における準位消失	815
<b>4. 3 次元拡張</b>	<b>816</b>
4.1. 1 次絡合子による 3 次元拡張	816
4.2. 2 次絡合子による 3 次元拡張	819

<sup>\*)</sup> 本稿は筆者の博士論文に基づく。

<sup>\*\*)</sup> お便りお待ちしております。E-mail: yamada\_heart@ybb.ne.jp

## はじめに

超対称性の概念は素粒子物理学の研究の中から生まれてきたものである。超対称性とはボーズ粒子とフェルミ粒子の間の対称性を意味しており、それは自然界に存在する4つの力を統一するのに必要不可欠な概念であると考えられている。素粒子物理学は基本的には場の理論の枠組みで論じられるため、超対称性の概念もまた場の理論の枠組みにおいて定式化されている。しかしながら場の理論における超対称性の帰結（とりわけ考えているモデルが超対称性の自発的破れを示すか否か）を分析することは難しい問題であり、そのためトイモデルとして超対称量子力学というものが提唱されたのである<sup>1)</sup>。

かように超対称量子力学というものは元来、超対称場の理論の理解を助けるためのモデルに過ぎなかったのであるが、ひとたび定式化がなされると、そこに様々な興味深い性質があることが認識されていった。そして間もなく、これらの性質が本質的には Darboux 変換や因子分解法という、既に知られた手法の再定式化であることが明らかにされた<sup>2)-12)</sup>。

Darboux 変換とは、基底状態が既知のハミルトニアンから、新しいハミルトニアンを生成する変換である<sup>13), 14)</sup>。このような変換で作られたハミルトニアンは、元のハミルトニアンと同一の（ただし第1励起状態から始まる）スペクトルを持つ。一方、因子分解法とは、ハミルトニアンを2通りに因子分解することにより、シュレーディンガー方程式の固有値問題を代数的に解く手法である<sup>15)-17)</sup>。これらの変換と解法とを、超対称量子力学は非常に見通しのよい形で内包している<sup>\*)</sup>。

そして現在、超対称量子力学は一つの研究分野を形成しており、多くの応用や拡張理論を生んでいる<sup>18)-23)</sup>。もちろん様々な流儀はあるのだが、あえて単純化して一言で言えば、超対称量子力学とは等スペクトル系の理論である。すなわち、スペクトルの等しい2つの系が超対称量子力学によって構成されるのである。この意味で超対称性とは“系を超えた対称性”といえることができる。

超対称量子力学においては、<sup>らくごうし</sup>絡合子 (intertwiner) とよばれる演算子が本質的な役割を果たす。絡合子が2つのハミルトニアンを絡み合わせるとき、その2つの系は等スペクトルになり、それらの組を超対称系と称するのである。

歴史的に絡合子という演算子は、ハミルトニアンの因子として導入されている。したがってそれは運動量について1次の演算子であった。しかしひとたび絡合子と2つのハミルトニアンの関係が樹立されてしまえば、もはやハミルトニアンの因子分解にこだわる必要はない。こうして運動量について高次の絡合子へと道が開かれる。このような高次の絡合子による等スペクトル系を多重超対称系と称する<sup>24)-26)</sup>。このような多重超対称等スペクトル系は、その一部として高次の Darboux 変換 (Crum 変換<sup>27), 28)</sup>) を含んでいるが、それには帰着されない系も存在する。

また絡合子による等スペクトル系構成を3次元に拡張するためには、多重超対称系への一般化が不可欠であることが明らかになった<sup>29)</sup>。

## 本論文の構成

本論文は超対称量子力学とその多重超対称系への拡張、また3次元空間への拡張について述べたものである。第1節は超対称量子力学の基本事項のレビューであるが、他のレビュー論文のようにハミルトニアンの因子分解に基礎をおくのではなく、より本質的と思われる絡合関係系を基礎におき議論の整理を試みた。第2節は因子分解法の再定式化である形状不変性についてのレビューである。量子力学の初学者であってもすぐに使えるよう、解法の手続きを明確化するよう努めた。第3節は拡張理論の一つである多重超対称系についてのレビューを行う。最終節は筆者自身による3次元拡張研究についての報告である。そこでは3次元絡合子の構造

<sup>\*)</sup> というわけであるから、“超対称量子力学”というなんだか高級そうな名前が付いてはいるけれども、要するに本稿の内容は楽しい物理数学である。もしサブタイトルを付けるとしたら、“シュレーディンガー方程式で遊ぼう”としたい。

が運動量について1次の場合と2次の場合について明らかにされ、また自明でない3次元等スペクトル系が構成される。

## §1. 超対称量子力学

### 1.1. 超対称量子力学

#### 1.1.1. 絡合関係式

2つの非相対論的ハミルトニアン

$$H = -\partial^2 + V(x), \quad (1.1)$$

$$\tilde{H} = -\partial^2 + \tilde{V}(x), \quad (1.2)$$

( $\partial = d/dx$ ) が intertwiner と呼ばれる演算子 (訳語として「絡合子」を提唱する)

$$A = v(x)\partial + w(x), \quad (1.3)$$

$$A^\dagger = -\partial v(x) + w(x) \quad (1.4)$$

(ただし  $v(x), w(x)$  は実函数) によって

$$AH = \tilde{H}A, \quad (1.5)$$

$$A^\dagger \tilde{H} = HA^\dagger, \quad (1.6)$$

の関係を満たすとする (これらは互いにエルミート共役である)。このとき (後で述べる条件が満たされていれば) 両系のスペクトルは一致する。それは  $A$  ないし  $A^\dagger$  を固有方程式

$$H\psi_E = E\psi_E, \quad (1.7)$$

$$\tilde{H}\tilde{\psi}_{\tilde{E}} = \tilde{E}\tilde{\psi}_{\tilde{E}} \quad (1.8)$$

に各々作用させると,

$$\tilde{H}(A\psi_E) = E(A\psi_E), \quad (1.9)$$

$$H(A^\dagger\tilde{\psi}_{\tilde{E}}) = \tilde{E}(A^\dagger\tilde{\psi}_{\tilde{E}}) \quad (1.10)$$

が得られるからである。すなわち  $\psi_E$  が  $H$  の固有値  $E$  に属する固有函数ならば、 $A\psi_E$  は  $\tilde{H}$  の固有値  $E$  に属する固有函数であり、また  $\tilde{\psi}_{\tilde{E}}$  が  $\tilde{H}$  の固有値  $\tilde{E}$  に属する固有函数ならば、 $A^\dagger\tilde{\psi}_{\tilde{E}}$  は  $H$  の固有値  $\tilde{E}$  に属する固有函数である。したがって両系のスペクトルは等しく、同一の固有値  $E$  に属する両系の固有函数  $\psi_E, \tilde{\psi}_E$  は、

$$\tilde{\psi}_E \propto A\psi_E, \quad (1.11)$$

$$\psi_E \propto A^\dagger\tilde{\psi}_E \quad (1.12)$$

の関係で結ばれている。すなわち一方の固有値問題が解かれていれば、他方の固有値問題の解もただちに得られることになる。関係式 (1.5), (1.6) のことを intertwining relation と呼び (訳語として「絡合関係式」を提唱する)、 $H$  と  $\tilde{H}$  を超対称パートナー、そのポテンシャル  $V, \tilde{V}$  をパートナーポテンシャルなどと呼ぶ。

上の議論からすれば両系のスペクトルは完全に一致するようであるが、見落としがある。次の2点について注意が必要である。

#### 注意1 (境界条件の問題)

上の議論においては、 $A, A^\dagger$  の作用が境界条件を破らないこと (固有函数をヒルベルト空間の

外に出さないこと)が仮定されている. 両系の定義域が  $(-\infty, \infty)$  で, かつ両系のポテンシャルが異なる特異点を持たない場合, それが満たされていることを 1.1.4 節で示す.

### 注意 2 (函数消滅の問題)

恒等的に  $A\psi_E = 0$  であれば  $\tilde{H}$  のスペクトルに  $E$  が含まれるとは言えず, また  $A^\dagger\tilde{\psi}_{\tilde{E}} = 0$  であれば  $H$  のスペクトルに  $\tilde{E}$  が含まれるとは言えない. 実は  $A\psi_E = 0$  ないし  $A^\dagger\tilde{\psi}_{\tilde{E}} = 0$  は基底状態でのみ成立しうること (1.1.4 節), また, どちらか一方のみが成立しうることを後に示す (1.1.5 節).

したがって  $H, \tilde{H}$  のスペクトルの違いは, 高々一方のスペクトルから他方の基底準位が “消失” することである (Fig.1 参照).

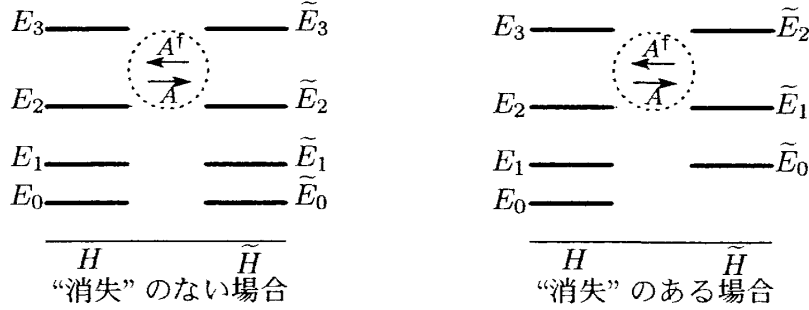


Fig. 1. 超対称パートナーのスペクトル

### 1.1.2. スーパーポテンシャル

絡合関係式 (1.5) にハミルトニアン (1.1), (1.2) 及び絡合子 (1.3) を代入すれば,  $v, w, V, \tilde{V}$  に対する関係式

$$v' = 0, \quad (1.13)$$

$$v(\tilde{V} - V) - v'' - 2w' = 0, \quad (1.14)$$

$$w(\tilde{V} - V) - vV' - w'' = 0 \quad (1.15)$$

が得られる (プライムは微分を表す). (1.5) よりわかるように  $A$  には定数倍の不定性があるから, (1.13) の解は  $v = 1$  として一般性を失わない. すると絡合子は

$$A = \partial + w(x) \quad (1.16)$$

の形であり, また (1.14) より

$$\tilde{V} - V = 2w' \quad (1.17)$$

が得られ, これを (1.15) に代入し積分することで

$$V = w^2 - w' + \epsilon, \quad (1.18)$$

$$\tilde{V} = w^2 + w' + \epsilon \quad (1.19)$$

が得られる.  $\epsilon$  は積分定数である. 函数  $w(x)$  は任意であり, これを与えることによって等スペクトル系  $H, \tilde{H}$  を得ることができる (ただし基底状態の消失に関する考察は必要である). 函数  $w(x)$  は超対称量子力学において「スーパーポテンシャル」と呼ばれる. 以下では, ポテンシャルが特異点を持つのを避けるため,  $w(x)$  として特異点を持たないものを考える.

積分定数  $\epsilon$  は後に述べる (1.24), (1.25) の形から「因子分解エネルギー」と呼ばれている. これは  $H, \tilde{H}$  のエネルギー基準を同じ値だけ上下するだけのものであるから,

スーパーポテンシャル  $w(x)$  を与えて  $V, \tilde{V}$  を構成する

という用い方をする場合には無視してよい。しかし後で述べるように、

与えられた  $V$  に対して (1-18) を  $w(x)$  に関する微分方程式と見なし、その解を用いて (1-19) より  $\tilde{V}$  を構成する

という使い方も可能であり、その場合には  $\epsilon$  の値によって  $w(x)$  の函数形および  $\tilde{V}$  は一般に異なる\*)。

### 1.1.3. 鏡映超対称

超対称系の等スペクトル性が自明な場合について触れておく。それはスーパーポテンシャルが偶函数の場合、あるいはより一般的にいて対称軸を持つ場合である。実際、

$$w(x) = w(2a - x) \quad (1-20)$$

が成立するとき、 $w'(x) = -w'(2a - x)$  であるから、

$$\tilde{V}(x) = w^2(x) + w'(x) \quad (1-21)$$

$$= w^2(2a - x) - w'(2a - x) \quad (1-22)$$

$$= V(2a - x) \quad (1-23)$$

となり、パートナーポテンシャル  $V, \tilde{V}$  は  $x = a$  に関して鏡映の関係になっている（このような場合を鏡映超対称と呼ぶことにする）。このとき等スペクトル性は自明であり、当然、基底状態の消失もない。

### 1.1.4. 絡合子の積とハミルトニアン

$A$  と  $A^\dagger$  の積を計算すると、次のような関係が示される。

$$A^\dagger A = H - \epsilon, \quad (1-24)$$

$$AA^\dagger = \tilde{H} - \epsilon. \quad (1-25)$$

これらを用いて、先に注意しておいた「境界条件の問題」に答えることが出来る。これらに  $\psi_E$  ないし  $\tilde{\psi}_E$  を右から、 $\psi_E^*$  ないし  $\tilde{\psi}_E^*$  を左からかけて全定義域にわたって積分し、 $A, A^\dagger$  が互いにエルミート共役であることを用いると、

$$\int dx |A\psi_E|^2 = (E - \epsilon) \int dx |\psi_E|^2, \quad (1-26)$$

$$\int dx |A^\dagger \tilde{\psi}_E|^2 = (E - \epsilon) \int dx |\tilde{\psi}_E|^2 \quad (1-27)$$

の関係を得る。したがって  $\psi_E$  が規格化可能ならば  $A\psi_E$  も（0にならない限り）規格化可能であり、 $\tilde{\psi}_E$  が規格化可能ならば  $A^\dagger \tilde{\psi}_E$  も（0にならない限り）規格化可能である。また定義域が  $(-\infty, \infty)$  の場合、規格化可能であれば無限遠で0という境界条件を満たすから、 $A, A^\dagger$  の作用は境界条件を破らないことがわかる\*\*).

また上式よりただちに得られる関係

$$E \geq \epsilon \quad (1-28)$$

\*) この用い方の場合には  $w_\epsilon(x), \tilde{V}_\epsilon(x)$  のように表しておくのが好都合であるが、 $w_a(x)$  という表記は  $w(x)$  にパラメータ  $a$  が含まれるという意味で用いられることもある。添え字の意味は文脈から判断していただきたい。

\*\*) 定義域が  $(0, \infty)$  の場合でも規格化可能性は保存されるが、原点でゼロという境界条件は破られうる。ゆえに無限大障壁が存在する場合など、絡合関係式の成立にも関わらずスペクトルが一致しない状況が起こりうる<sup>30)</sup>。文献<sup>31)</sup>には3次元動径問題 ( $0 \leq r \leq \infty$ ) における等スペクトル性成立の条件が

$$\lim_{r \rightarrow 0} r|w(r)| \geq \frac{1}{2}$$

と与えられている。また  $V(x), \tilde{V}(x)$  が異なる特異点を持つ場合、境界条件が両系で異なるためスペクトルの一致は保証されない。この問題については文献<sup>32)-37)</sup>を参照のこと。これら、絡合関係式の成立にもかかわらずスペクトルが一致しない状況を「超対称性の explicit な破れ」と呼ぶことがある。

に注意する。等号成立は  $A\psi_E = 0$  ないし  $A^\dagger\tilde{\psi}_E = 0$  のときであり、このとき固有値  $E$  はスペクトルにおける最小値  $\epsilon$  である。すなわち先に注意した「函数消滅の問題」は基底状態についてのみ起こりうるということがわかる。これを受け、次節で基底状態消失の問題を考える。

#### 1.1.5. 絡合子のゼロモードと基底状態の“消失”

$w$  を与えることで構成した  $V, \tilde{V}$  が完全に同一のスペクトルなのか、それとも最小固有値については一方から取り除かれるのかを考える。この問題の分析にあたっては  $A, A^\dagger$  の“ゼロモード”函数  $\phi_\mp$ 、すなわち

$$A\phi_- \equiv 0, \quad (1.29)$$

$$A^\dagger\phi_+ \equiv 0 \quad (1.30)$$

について調べる必要がある。まず  $\phi_\mp$  に各々  $H, \tilde{H}$  を作用させ (1.24), (1.25) を用いれば

$$H\phi_- = (A^\dagger A + \epsilon)\phi_- = \epsilon\phi_-, \quad (1.31)$$

$$\tilde{H}\phi_+ = (AA^\dagger + \epsilon)\phi_+ = \epsilon\phi_+ \quad (1.32)$$

となるから、 $\phi_\mp$  が規格化可能であれば、それは各々  $H, \tilde{H}$  の固有値  $\epsilon$  に属する固有函数であることがわかる。(1.28) で注意したように  $E \geq \epsilon$  であるから、これは基底状態であった。すなわち

$$\phi_- \propto \psi_0, \quad (1.33)$$

$$\epsilon = E_0. \quad (1.34)$$

また、

$$A = \partial + w = \exp\left(-\int dx w\right) \partial \exp\left(\int dx w\right), \quad (1.35)$$

$$A^\dagger = -\partial + w = -\exp\left(\int dx w\right) \partial \exp\left(-\int dx w\right) \quad (1.36)$$

と書けることから、ゼロモードはスーパーポテンシャルを用いて

$$\phi_\mp \propto \exp\left(\mp \int dx w\right) \quad (1.37)$$

と与えられるが、

$$\phi_+\phi_- = \text{const} \quad (1.38)$$

が成立するため、 $\phi_\mp$  は同時には規格化できないことがわかる。

$\phi_-$  が規格化可能で  $\psi_0$  になるとき、 $\phi_+$  は  $\tilde{H}$  の固有値  $\epsilon$  に属する固有函数ではない（規格化できないから）。実は  $\phi_+$  以外にも、 $H\phi_+ = \epsilon\phi_+$  を満たす規格化可能な  $\tilde{\phi}_+$  は存在しない。仮にそのような  $\tilde{\phi}_+$  が存在したとすると、(1.12) より

$$\psi_0 \propto A^\dagger\tilde{\phi}_+ \quad (1.39)$$

が成立する。(1.36) は  $\phi_\mp$  を用いて

$$A^\dagger \propto -\phi_+\partial\phi_-, \quad (1.40)$$

あるいは今の場合  $\phi_- \propto \psi_0$  を用いて

$$A^\dagger \propto -\psi_0^{-1}\partial\psi_0 \quad (1.41)$$

と書けるが、これを用いると

$$\psi_0 \propto \psi_0^{-1} \partial \psi_0 \tilde{\phi}_+. \quad (1.42)$$

これを  $\tilde{\phi}_+$  について解けば

$$\tilde{\phi}_+ \propto \frac{1}{\psi_0} \int dx \psi_0^2. \quad (1.43)$$

これは明らかに規格化不能で矛盾する。

したがって  $\phi_-$  が規格化可能で基底状態  $\psi_0$  ( $E_0 = \epsilon$ ) になるとき,  $\tilde{H}$  には固有値  $\epsilon$  に属する固有状態は存在しない. こうして  $\tilde{H}$  のスペクトルから  $H$  の基底準位が “消失” することになるのである. 同様に  $\phi_+$  が規格化可能ならばそれは  $\tilde{H}$  の基底状態  $\tilde{\psi}_0$  ( $\epsilon = \tilde{E}_0$ ) であり, このとき  $\phi_-$  は規格化不能で,  $H$  には  $\epsilon$  に属する固有状態が存在しないことが示される.

これら一方のゼロモードが規格化可能であることにより他方の基底状態が消失する状況を「exact な超対称性」あるいは「unbroken な超対称性」という. (1.37) より exact な超対称性のためには,  $w(x)$  の  $x \rightarrow \pm\infty$  における漸近的な振る舞いが互いに逆符号でなければならないことがわかる. さもなくば  $w(x)$  の原始関数の  $x \rightarrow \pm\infty$  における振る舞いが互いに逆符号となり, ゼロモード  $\phi_{\mp}$  は一方の無限遠で 0 に収束したとしても他方の無限遠で発散してしまうからである\*). 特に  $\phi_-$  が規格化可能であるためには  $w(x \rightarrow \infty) > 0, w(x \rightarrow -\infty) < 0$  でなければならない\*\*).

$\phi_-$  が規格化可能な場合をまとめると次のようになる.

$$w(\infty) > 0, w(-\infty) < 0, \quad (1.44)$$

$$E_0 = \epsilon, \quad \psi_0 \propto \phi_- = \exp\left(-\int dx w\right), \quad (1.45)$$

$$\tilde{E}_n = E_{n+1} \quad (n \geq 0), \quad (1.46)$$

$$\tilde{\psi}_n = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1} - E_0}} A \psi_{n+1} \quad (n \geq 0), \quad (1.47)$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1} - E_0}} A^\dagger \tilde{\psi}_n \quad (n \geq 0). \quad (1.48)$$

なお (1.37) より  $w$  を  $\phi_-$  すなわち  $\psi_0$  について解くと

$$w = -\frac{\psi'_0}{\psi_0} \quad (1.49)$$

となるから,  $w$  は特異点を持たないことがわかる\*\*\*). またこの式を用いて (1.17), (1.47) は

$$\tilde{V} = V - 2 \frac{d}{dx} \frac{\psi'_0}{\psi_0}, \quad (1.50)$$

$$\tilde{\psi}_n = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1} - E_0}} \left( \psi'_{n+1} - \frac{\psi'_0}{\psi_0} \psi_{n+1} \right) \quad (1.51)$$

\*) (1.20) でスーパーポテンシャル  $w$  が対称軸を持つ函数の場合, 超対称パートナーは互いに鏡映となり基底状態の消失は起こりえないことを述べた. これはスーパーポテンシャルの観点から見ると, その漸近的振る舞いゆえゼロモード  $\phi_{\mp}$  がともに規格化できないためである.

\*\*) 無限井戸のように, 定義域が有限 ( $a < x < b$ ) で, かつ端点で波動函数ゼロの境界条件 ( $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ) が課される場合も,  $\phi_-$  が規格化可能であることの必要条件として  $w(a+0) < 0, w(b-0) > 0$  がいえる. (1.49) を見よ.

\*\*\*) このスーパーポテンシャルと基底状態の関係は興味深い. すなわち基底状態の極大点はポテンシャルの極小点ではなく, exact な超対称性を与えるスーパーポテンシャルのゼロ点に一致する.



とも表せるが、これは Darboux 変換<sup>13)</sup>に他ならない。  $\phi_+$  が規格化可能な場合も同様な関係が成り立つが、むしろ  $w \rightarrow -w$  として  $\phi_-$  を規格化可能に選ぶことが多い。

一方、もし  $\phi_{\mp}$  がともに規格化できなければ、基底状態の消失は起こらず、 $H$  と  $\tilde{H}$  のスペクトルは完全に一致する（この状況を「超対称性の自発的破れ」という）。この場合には次のような関係になる。

$$w(\infty)w(-\infty) > 0, \quad (1.52)$$

$$\tilde{E}_n = E_n \quad (n \geq 0), \quad (1.53)$$

$$\tilde{\psi}_n = \frac{1}{\sqrt{E_n - \epsilon}} A \psi_n \quad (n \geq 0), \quad (1.54)$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{E_n - \epsilon}} A^\dagger \tilde{\psi}_n \quad (n \geq 0). \quad (1.55)$$

(1.45)～(1.48) 及び (1.53)～(1.55) を簡単に「超対称変換」と呼ぶ人もいる。

#### 1.1.6. Riccati 方程式

ここまでは  $w$  を与えて  $V, \tilde{V}$  を構成するという立場をとってきた。ここでは逆に  $V$  を与えて、(1.18) を  $w$  についての微分方程式とする場合を考える。これは非線形 1 階微分方程式で、Riccati 方程式と呼ばれるクラスに属するが、一般には求積法で解くことはできない。しかし Riccati 方程式 (1.18) は次のようにして線形化することができる。(1.31) と (1.37) の関係を想定して、

$$\phi \equiv \exp \left( - \int dx w \right) \quad (1.56)$$

とおけば

$$w = - \frac{\phi'}{\phi} \quad (1.57)$$

であるから、

$$w^2 - w' = \frac{\phi''}{\phi}. \quad (1.58)$$

したがって  $w$  についての Riccati 方程式は  $\phi$  についての Schrödinger 型方程式

$$-\phi'' + V\phi = \epsilon\phi \quad (1.59)$$

に変換される。この Schrödinger 型方程式の解が得られれば、それを (1.57) に代入することで  $w$  が求まり、(1.19) あるいは (1.17) に代入することで  $\tilde{V}$  が得られる。その際、 $\tilde{V}$  が特異点を持たないためには、 $w$  は特異点を持つてはならない。ゆえに  $\phi$  はゼロ点を持つてはならない。このため  $\epsilon$  は (1.28) すなわち  $\epsilon \leq E_0$  に制限される。

(1.59) はあくまで Schrödinger “型” 方程式であって、境界条件は課されていないことに注意すると、我々は固有函数でなく一般解を用いることができる。Schrödinger 型方程式の一般解は、特解から定数変化法によって構成できる。特解を  $\phi_p$  として  $\phi = C(x)\phi_p$  を代入すると  $C(x)$  についての方程式

$$C''\phi_p + 2C'\phi'_p = 0 \quad (1.60)$$

が得られ、その解は

$$C \propto \int dx \phi_p^{-2}. \quad (1.61)$$

よって一般解は

$$\phi = \phi_p \left( a + b \int dx \phi_p^{-2} \right) \quad (1.62)$$

と与えられる（第2項は(1.43)に他ならない）。したがって変換(1.57)より Riccati 方程式の一般解は

$$w = -\frac{\phi'_p}{\phi_p} - \frac{\phi_p^{-2}}{\mu + \int dx \phi_p^{-2}} \quad (1.63)$$

と与えられる。

この結果はまた元の Riccati 方程式(1.18)からも直接見ることができる。その特解を  $w_p$  とし、

$$w = w_p + \frac{1}{\chi} \quad (1.64)$$

とおく。

$$w^2 = w_p^2 + 2w_p \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}, \quad (1.65)$$

$$w' = w'_p - \frac{\chi'}{\chi^2} \quad (1.66)$$

を Riccati 方程式に代入して、

$$2w_p \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} + \frac{\chi'}{\chi^2} = 0 \quad (1.67)$$

$$\Rightarrow \chi' + 2w_p \chi + 1 = 0. \quad (1.68)$$

これは定数変化法で積分できて、

$$\chi = -\exp \left( -2 \int dx w_p \right) \int dx \exp \left( 2 \int dx w_p \right). \quad (1.69)$$

したがって

$$w = w_p - \frac{\exp \left( 2 \int dx w_p \right)}{\mu + \int dx \exp \left( 2 \int dx w_p \right)}. \quad (1.70)$$

$w_p = -\phi'_p/\phi_p$  とすればこれは(1.63)に一致する。

このように与えられたポテンシャル  $V(x)$  に対して、そのスーパーポテンシャル  $w(x)$  はただ一つに定まるのではなく、1パラメータ族であることに注意しなければならない。さらに因子分解エネルギー  $\epsilon$  として別の値を用いれば、また異なる1パラメータ族が得られる。このように、与えられたポテンシャルの超対称パートナーは一意的でなく無数に存在するわけである。

ただし、このような Riccati 一般解を用いたパートナーは、特異点を持つことがあるため注意が必要である。パラメータ  $\mu$  の値を適切に選ぶことで特異点を避けることができる場合と、パラメータをどう選んでも特異点が避けられない場合がある。例えば(1.63)において特解  $\phi_p$  として基底状態  $\psi_0$  を、したがって因子分解エネルギー  $\epsilon$  として基底エネルギー  $E_0$  を用いると、 $x \rightarrow -\infty$  で  $\psi_0^{-2} \rightarrow \infty$  となるため、積分の下端として  $-\infty$  を取ることはできず、またどのような下端とパラメータ  $\mu$  の値を取ろうとも、分母が0になる点が必ず発生してしまう。

## 1.1.7. 散乱問題

以上は束縛状態を念頭に置いて議論してきたが、超対称性は散乱状態についても関係を与える。まず散乱が起きるためには、 $V, \tilde{V}$  が  $x \rightarrow -\infty$  ないし  $x \rightarrow \infty$ 、あるいはその両方で有限値に収束しなければならない。ここでは特に  $V, \tilde{V}$  が  $x \rightarrow \pm\infty$  の両方で定数になる場合を考える。

$x \rightarrow \pm\infty$  で (1.18), (1.19) がともに定数になることより、スーパーポテンシャルは

$$w^2(x \rightarrow \pm\infty) = \text{const}, \quad (1.71)$$

$$w'(x \rightarrow \pm\infty) = \text{const} \quad (1.72)$$

となることが要求されるが、ポテンシャルの値が収束するためには  $w'(x \rightarrow \pm\infty) = 0$  としなければならない。よって

$$w_{\pm} \equiv w(x \rightarrow \pm\infty) \quad (1.73)$$

なる量（定数）を定義すると、

$$V(x \rightarrow \pm\infty) = \tilde{V}(x \rightarrow \pm\infty) = w_{\pm}^2 + \epsilon \quad (1.74)$$

である。

$x = -\infty$  からエネルギー  $E$  の平面波を入射させることにすると、ポテンシャル  $V, \tilde{V}$  の系の波動関数  $\psi, \tilde{\psi}$  に対する境界条件は

$$\psi(x \rightarrow -\infty, k) = e^{ikx} + Re^{-ikx}, \quad (1.75)$$

$$\psi(x \rightarrow \infty, k') = Te^{ik'x} \quad (1.76)$$

及び

$$\tilde{\psi}(x \rightarrow -\infty, k) = e^{ikx} + \tilde{R}e^{-ikx}, \quad (1.77)$$

$$\tilde{\psi}(x \rightarrow \infty, k') = \tilde{T}e^{ik'x} \quad (1.78)$$

となる。ただし

$$k = \sqrt{E - \epsilon - w_-^2}, \quad (1.79)$$

$$k' = \sqrt{E - \epsilon - w_+^2} \quad (1.80)$$

で、散乱が可能であるためには  $E > w_{\pm}^2 + \epsilon$  でなければならない。

両系の波動関数は (1.11) で結ばれるから、 $N$  を規格化定数として

$$e^{ikx} + Re^{-ikx} = N(-\partial + w_-)(e^{ikx} + \tilde{R}e^{-ikx}) \quad (1.81)$$

$$= N[(-ik + w_-)e^{ikx} + (ik + w_-)\tilde{R}e^{-ikx}], \quad (1.82)$$

$$Te^{ik'x} = N[(-\partial + w_+)\tilde{T}e^{ik'x}] \quad (1.83)$$

$$= N[(-ik' + w_+)\tilde{T}e^{ik'x}] \quad (1.84)$$

を得る。まず  $e^{ikx}$  の係数より

$$N = \frac{1}{w_- - ik} \quad (1.85)$$

が得られ、これと  $e^{-ikx}$  の係数より

$$R = \frac{w_- + ik}{w_- - ik} \tilde{R}, \quad (1.86)$$

また  $e^{ik'x}$  の係数より

$$T = \frac{w_+ - ik'}{w_- - ik} \tilde{T} \quad (1.87)$$

が得られる。すなわち一方の反射，透過係数が知られていれば，他方の反射，透過係数もただちに得られることになる。また，両系の反射，透過確率が等しいことも明らかである：

$$|R|^2 = |\tilde{R}|^2, \quad (1.88)$$

$$|T|^2 = |\tilde{T}|^2. \quad (1.89)$$

### 1.1.8. 超対称代数

超対称量子力学という名の由来について触れておく。スーパーハミルトニアン  $H$  及びスーパーチャージ  $Q, Q^\dagger$  を

$$H \equiv \begin{pmatrix} H - \epsilon & 0 \\ 0 & \tilde{H} - \epsilon \end{pmatrix}, \quad (1.90)$$

$$Q \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

のように定義すると，次のような関係が成立する。

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0, \quad (1.92)$$

$$\{Q, Q^\dagger\} = H, \quad (1.93)$$

$$Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0, \quad (1.94)$$

$0$  は  $2 \times 2$  のゼロ行列。これは超対称代数と呼ばれるものの一種である。超対称量子力学の名はここに由来する。

## 1.2. 具体例

### 1.2.1. 束縛問題の例 — 無限井戸

量子力学のテキストで最初に出会う問題，無限井戸型ポテンシャルの exact な超対称パートナー（Darboux 変換）を求めてみる。無限井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & (x < 0, L < x) \end{cases} \quad (1.95)$$

に対するシュレーディンガー方程式

$$-\psi'' = E\psi \quad (0 < x < L) \quad (1.96)$$

の一般解は  $\psi = C \sin \sqrt{E}x + D \cos \sqrt{E}x$  である（ $C, D$  は積分定数）。境界条件  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  と規格化を考慮すると，固有函数と固有値は

$$\psi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi}{L} x & (0 < x < L) \\ 0 & (x < 0, L < x), \end{cases} \quad (1.97)$$

$$E_n = \frac{(n+1)^2 \pi^2}{L^2} \quad (1.98)$$

（ $n = 0, 1, 2, \dots$ ）と求まる。基底状態  $\psi_0$  を用いて exact なスーパーポテンシャルは

$$w = -\frac{\psi'_0}{\psi_0} \quad (1.99)$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi}{L} \cot \frac{\pi}{L} x & (0 < x < L) \\ 0 & (x < 0, L < x) \end{cases} \quad (1.100)$$

と求まり, 超対称パートナーは (1.17) より

$$\tilde{V} = V + 2w' \quad (1.101)$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi^2}{L^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{L}x} & (0 < x < L) \\ 0 & (x < 0, L < x). \end{cases} \quad (1.102)$$

このポテンシャルは  $0 < x < L$  において無限井戸型ポテンシャルと異なる函数形を持つが<sup>\*</sup>, その固有値は無限井戸型のものと (第1励起準位から始まるが) 等しい:

$$\tilde{E}_n = E_{n+1} \quad (1.103)$$

$$= \frac{(n+2)^2\pi^2}{L^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.104)$$

固有函数も (1.47) より

$$\tilde{\psi}_n = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1} - E_0}} (\partial + w) \psi_{n+1} \quad (1.105)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L(n+1)(n+3)}} \left( (n+2) \cos \frac{(n+2)\pi}{L}x - \sin \frac{(n+2)\pi}{L}x \cot \frac{\pi}{L}x \right) & (0 < x < L) \\ 0 & (x < 0, L < x) \end{cases} \quad (1.106)$$

と単なる微分操作で求まる.

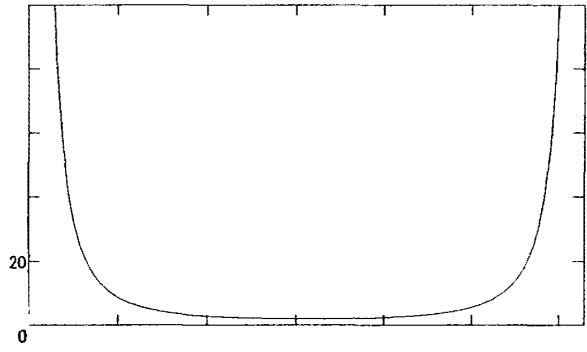


Fig. 2. 井戸型ポテンシャルの exact な超対称パートナー ( $L = \pi$ )

$\tilde{\psi}_0$  が得られているから, これを用いて  $\tilde{V}$  のパートナーを求めることも可能である (これは高次 Darboux 変換, Crum 変換に他ならない<sup>27), 28)</sup>).

$$\tilde{\psi}_0 = -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2 \frac{\pi}{L}x \quad (1.107)$$

を用いてスーパーポテンシャルは

$$\tilde{w} = -\frac{\tilde{\psi}_0'}{\tilde{\psi}_0} \quad (1.108)$$

$$= \begin{cases} -2\frac{\pi}{L} \cot \frac{\pi}{L}x & (0 < x < L) \\ 0 & (x < 0, L < x) \end{cases} \quad (1.109)$$

<sup>\*</sup> これは後述の Pöschl-Teller ポテンシャル (p.800) ないしは三角 Rosen-Morse ポテンシャル (p.801) において  $B \rightarrow 0$  とした極限の場合である.

となるから、超対称パートナーは

$$\tilde{V}_2 = \tilde{V} + 2\tilde{w}' \quad (1.110)$$

$$= \begin{cases} \frac{6\pi^2}{L^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{L} x} & (0 < x < L) \\ 0 & (x < 0, L < x) \end{cases} \quad (1.111)$$

$$= 3\tilde{V}. \quad (1.112)$$

固有値は

$$\tilde{E}_n^{(2)} = \tilde{E}_{n+1} \quad (1.113)$$

$$= \frac{(n+3)^2 \pi^2}{L^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.114)$$

固有函数も先の場合同様、

$$\tilde{\psi}_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}_{n+1} - \tilde{E}_0}} (\partial + \tilde{w}) \tilde{\psi}_{n+1} \quad (1.115)$$

を実行すれば得られる。以下同様の手続きにより高次のパートナーが得られるが、それらは全て  $\tilde{V}$  の定数倍になる。このように超対称パートナーのさらに超対称なパートナーをとる操作は、第3節で述べる「多重超対称性」の一種である。

### 1.2.2. Riccati 一般解の例 — Abraham-Moses-Pursey ポテンシャル

調和振動子

$$V(x) = \omega^2 x^2 \quad (1.116)$$

の Riccati 一般解を用いた超対称パートナーを求めてみる。スーパーポテンシャル方程式

$$\omega^2 x^2 = w^2 - w' + \epsilon \quad (1.117)$$

の特解として、

$$w_p = -\omega x \quad (1.118)$$

の形を仮定すると\*)、

$$\epsilon = -\omega \quad (1.119)$$

のとき解になる。一般解は

$$w = w_p - \frac{\exp(2 \int dx w_p)}{\mu + \int dx \exp(2 \int dx w_p)} \quad (1.120)$$

$$= -\omega x - \frac{e^{-\omega x^2}}{\mu + \int dx e^{-\omega x^2}} \quad (1.121)$$

となる。これが特異点を持たないためには、積分の下端を  $\infty$  にとり、

$$-\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \leq \int_{\infty}^x dx e^{-\omega x^2} \leq 0 \quad (1.122)$$

---

\*)  $w = \omega x$  とするとゼロモードは規格化可能で基底状態となり、Riccati 一般解を用いて構成した超対称パートナーは特異点を持つてしまう。

であることから、パラメータ  $\mu$  を

$$\mu < 0, \quad \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} < \mu \quad (1.123)$$

の範囲に取ればよい。相補誤差関数

$$\operatorname{erfc} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dx e^{-x^2} \quad (1.124)$$

を用いると

$$w = -\omega x - \frac{e^{-\omega x^2}}{\mu - \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\omega} \operatorname{erfc} \sqrt{\omega} x} \quad (1.125)$$

と書ける。これを用いて超対称パートナーは

$$\tilde{V} = V + 2w' \quad (1.126)$$

$$= \omega^2 x^2 - 2\omega - \left( \frac{2e^{-\omega x^2}}{\mu - \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\omega} \operatorname{erfc} \sqrt{\omega} x} \right)' \quad (1.127)$$

と求まる。  $w(\infty) < 0, w(-\infty) > 0$  であるから、  $\phi_+ = \exp(\int dx, w)$  が規格化可能で  $\tilde{\psi}_0$  となり、このポテンシャルは調和振動子の基底状態の下に  $\epsilon = -\omega$  の準位が追加されたスペクトルを持つ。また、この最低固有値の間隔  $2\omega$  は調和振動子の準位間隔と等しく、やはり等間隔であることがわかる。したがって  $2\omega$  だけ持ち上げておけば調和振動子とまったく同一のスペクトルを持ったポテンシャルとなる\*)。これは Abraham-Moses-Pursey ポテンシャルと呼ばれ、1980 年に Abraham と Moses が逆散乱法によって見いだしていたものである<sup>38)-42)</sup>。

### 1.2.3. 散乱問題の例 1 — デルタポテンシャル

散乱問題の例として、デルタ引力ポテンシャル

$$V(x) = -V_0 \delta(x) \quad (V_0 > 0) \quad (1.128)$$

の exact な超対称パートナー (Darboux 変換) を考える<sup>12), 43)</sup>。シュレーディンガー方程式

$$-\psi'' - V_0 \delta(x) \psi = E \psi \quad (1.129)$$

の固有状態を求める。境界条件  $\psi(\pm\infty) = 0$  と接続条件  $\psi(-0) = \psi(+0)$  を  $x \neq 0$  における一般解  $\psi = Ae^{\sqrt{-E}x} + Be^{-\sqrt{-E}x}$  に課せば、固有函数は

$$\psi(x) = Ae^{-\sqrt{-E}|x|} \quad (1.130)$$

の形でなければならないことがわかる。またシュレーディンガー方程式を原点近傍で積分して得られる導函数の接続条件

$$-\psi'(+0) + \psi'(-0) - V_0 \psi(0) = 0 \quad (1.131)$$

より、エネルギー固有値

$$E = -\frac{V_0^2}{4} \quad (1.132)$$

\*) という次第であるから、「調和振動子が場の理論で本質的な役割を果たすのは、そのスペクトルが等間隔だからである」としばしば言われるのはちょっと違うと思う。

が得られ、デルタ引力ポテンシャルはこのようただ一つの束縛状態を持つことがわかる。この固有函数を用いて exact なスーパーポテンシャルは

$$w = -\frac{\psi'}{\psi} \quad (1.133)$$

$$= \frac{V_0}{2} \operatorname{sgn}(x) \quad (1.134)$$

と求まる。ただし  $\operatorname{sgn}(x)$  は符号函数で

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} +1 & (x > 0), \\ -1 & (x < 0), \end{cases} \quad (1.135)$$

$$(\operatorname{sgn}(x))' = 2\delta(x). \quad (1.136)$$

よって超対称パートナーは

$$\tilde{V} = V + 2w' \quad (1.137)$$

$$= +V_0\delta(x) \quad (1.138)$$

となる。すなわち、互いに逆符号の引力デルタポテンシャルと斥力デルタポテンシャルは exact な超対称パートナーなのである。 $\tilde{V}$  においては基底状態の消失が生じるが、実際これは束縛状態を持たない。

超対称パートナーが明らかになったから、引き続き散乱状態について考える。引力デルタポテンシャルにおいて、散乱が生ずるためには  $E > 0$  が必要で、また境界条件

$$\psi(x \rightarrow -\infty, k) = e^{ikx} + Re^{-ikx}, \quad (1.139)$$

$$\psi(x \rightarrow \infty, k) = Te^{ik'x} \quad (1.140)$$

より波動函数は

$$\psi = \begin{cases} e^{i\sqrt{E}x} + Re^{-i\sqrt{E}x} & (x < 0), \\ Te^{i\sqrt{E}x} & (0 < x) \end{cases} \quad (1.141)$$

の形となる。原点における波動函数とその導函数の接続条件より、

$$1 + R = T, \quad (1.142)$$

$$i\sqrt{E}(1 - R - T) - V_0T = 0. \quad (1.143)$$

したがって反射・透過係数は

$$R = \frac{-V_0/2}{V_0/2 + i\sqrt{E}}, \quad (1.144)$$

$$T = \frac{i\sqrt{E}}{V_0/2 + i\sqrt{E}}. \quad (1.145)$$

スーパーポテンシャルの  $x \rightarrow \pm\infty$  における漸近値は

$$w_{\pm} = \pm \frac{V_0}{2} \quad (1.146)$$

であるから、超対称パートナーの反射・透過係数は

$$\tilde{R} = \frac{w_- - i\sqrt{E}}{w_- + i\sqrt{E}}R = \frac{-V_0/2}{V_0/2 - i\sqrt{E}}, \quad (1.147)$$

$$\tilde{T} = \frac{w_- - i\sqrt{E}}{w_+ - i\sqrt{E}}T = \frac{-i\sqrt{E}}{V_0/2 - i\sqrt{E}} \quad (1.148)$$



となり、当然のことながら  $R, T$  において  $V_0 \rightarrow -V_0$  としたものに一致する。絶対値の 2 乗を取れば  $V_0$  は 2 乗の形でしか現れないから、引力デルタポテンシャルと斥力デルタポテンシャルの反射・透過確率が等しいことははじめから明らかであるのだが、超対称量子力学の観点からは、それらが超対称パートナーであることがその一致の理由となる。

#### 1.2.4. 散乱問題の例 2 — 無反射ポテンシャル

散乱問題の次の例として、KdV 方程式のソリトン解を理解する上で重要な無反射ポテンシャルを取り上げる。スーパーポテンシャルとして

$$w_a = a \tanh x \quad (1.149)$$

を与えると ( $a$  は実数のパラメータ),

$$w_a^2 = a^2 \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \right), \quad (1.150)$$

$$w'_a = \frac{a}{\cosh^2 x} \quad (1.151)$$

より超対称系は

$$V_a = a^2 - \frac{a(a+1)}{\cosh^2 x}, \quad (1.152)$$

$$\tilde{V}_a = a^2 - \frac{a(a-1)}{\cosh^2 x} \quad (1.153)$$

となる\*) (因子分解エネルギー  $\epsilon$  は 0 とした)。これらは同一の函数形を持ち、単にパラメータの値が異なるのみである：

$$\tilde{V}_a(x) = V_{a-1}(x) + a^2 - (a-1)^2. \quad (1.154)$$

このような場合、超対称系に形状不変性 (shape invariance) があるという。その重要性については次節で述べる。絡合子

$$A_a = \partial + w_a \quad (1.155)$$

のゼロモード ( $A_a \phi_a \equiv 0$ ) は

$$\phi_a = \exp \left( - \int dx w_a \right) \quad (1.156)$$

$$= \frac{1}{\cosh^a x} \quad (1.157)$$

である。

パラメータを  $a = 1$  とおけば、 $w_1 = \tanh x$  で

$$V_1 = 1 - \frac{2}{\cosh^2 x}, \quad (1.158)$$

$$\tilde{V}_1 = 1 \quad (1.159)$$

となるが、 $\tilde{V}_1$  の系は自由粒子で束縛状態を持たず、反射及び透過係数は

$$\tilde{R}_1 = 0, \quad \tilde{T}_1 = 1. \quad (1.160)$$

---

\*) これは Eckart ポテンシャルと呼ばれるものである。その概形について p.795 を参照のこと。

一方,  $V_1$  の系については, 超対称性より基本的には自由粒子と等スペクトルで束縛状態を持たないことになるが, 例外として絡合子のゼロモード

$$\phi_1 = \frac{1}{\cosh x} \quad (1.161)$$

が規格化可能であることから束縛状態  $\psi_{1,0} \propto \phi_1$  を 1 つ持ち, その固有値  $E_{1,0}$  は因子分解エネルギー, すなわち今の場合 0 である. また  $w_1 = \tanh x$  の漸近値が  $w_{1\pm} = \pm 1$  であることから,  $k' = k \equiv \sqrt{E-1}$  として反射及び透過係数は,

$$R_1 = \frac{w_{1-} + ik}{w_{1-} - ik} \tilde{R}_1 = 0, \quad (1.162)$$

$$T_1 = \frac{w_{1+} - ik'}{w_{1-} - ik} \tilde{T}_1 = \frac{1 - ik}{-1 - ik}. \quad (1.163)$$

$V_1$  は束縛状態を 1 つだけ持ち, 反射率が 0 の無反射ポテンシャルである.

次にパラメータを  $a = 2$  とおけば,  $w_2 = 2 \tanh x$  で

$$V_2 = 4 - \frac{6}{\cosh^2 x}, \quad (1.164)$$

$$\tilde{V}_2 = 4 - \frac{2}{\cosh^2 x} \quad (1.165)$$

となるが,  $\tilde{V}_2$  は

$$\tilde{V}_2 = V_1 + 3 \quad (1.166)$$

であるから,  $V_1$  を 3 だけ持ち上げたものにすぎない. したがって  $\tilde{V}_2$  はただ 1 つの束縛状態

$$\tilde{\psi}_{2,0} = \psi_{1,0} \propto \phi_1 = \frac{1}{\cosh x}, \quad \tilde{E}_{2,0} = E_{1,0} + 3 = 3 \quad (1.167)$$

を持ち, 反射係数, 透過係数は

$$\tilde{R}_2 = R_1 = 0, \quad (1.168)$$

$$\tilde{T}_2 = T_1 = \frac{1 - ik}{-1 - ik}. \quad (1.169)$$

ただし波数  $k$  はポテンシャルの基準の変更に伴い ( $E \rightarrow E - 3$  より)  $k \equiv \sqrt{E-4}$  としなければならないが, これは  $k = \sqrt{E - w_{2-}^2}$  の表式が自動的に保証してくれる. 一方,  $V_2$  の系については, 絡合子のゼロモード

$$\phi_2 = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (1.170)$$

が規格化可能であることから, 基底状態として  $\psi_{2,0} \propto \phi_2$  を持ち, その固有値は  $E_{2,0} = 0$  である. また  $\tilde{V}_2$  との超対称性より, 絡合子  $A_2^\dagger = -\partial + w_2$  を用いて

$$\psi_{2,1} \propto A_2^\dagger \tilde{\psi}_{2,0} \propto \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}, \quad (1.171)$$

$$E_{2,1} = \tilde{E}_{2,0} = 3 \quad (1.172)$$

を第 1 励起状態として持つことがわかる. さらに  $w_2 = 2 \tanh x$  の漸近値が  $w_{2\pm} = \pm 2$  であることから, 反射及び透過係数は  $k' = k \equiv \sqrt{E-4}$  として

$$R_2 = \frac{w_{2-} + ik}{w_{2-} - ik} \tilde{R}_2 = 0, \quad (1.173)$$

$$T_2 = \frac{w_{2+} - ik'}{w_{2-} - ik} \tilde{T}_2 = \frac{2 - ik}{-2 - ik} \cdot \frac{1 - ik}{-1 - ik} = \frac{\Gamma(3 - ik)\Gamma(-2 - ik)}{\Gamma(1 - ik)\Gamma(-ik)}. \quad (1.174)$$

$V_2$  は束縛状態を 2 つ持ち、反射率が 0 の無反射ポテンシャルである。

同様にパラメータを  $a = 3$  とおけば、 $w_3 = 3 \tanh x$  で

$$V_3 = 9 - \frac{12}{\cosh^2 x}, \quad (1.175)$$

$$\tilde{V}_3 = 9 - \frac{6}{\cosh^2 x} = V_2 + 5. \quad (1.176)$$

$\tilde{V}_3$  は 2 つの束縛状態

$$\tilde{\psi}_{3,0} = \psi_{2,0} \propto \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \tilde{E}_{3,0} = E_{2,0} + 5 = 5, \quad (1.177)$$

$$\tilde{\psi}_{3,1} = \psi_{2,1} \propto \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}, \quad \tilde{E}_{3,1} = E_{2,1} + 5 = 8 \quad (1.178)$$

を持ち、反射係数、透過係数は（後述の  $k$  を用いて）

$$\tilde{R}_3 = R_2 = 0, \quad (1.179)$$

$$\tilde{T}_3 = T_2 = \frac{\Gamma(3 - ik)\Gamma(-2 - ik)}{\Gamma(1 - ik)\Gamma(-ik)}. \quad (1.180)$$

一方、 $V_3$  の系については、絡合子のゼロモード

$$\phi_3 = \frac{1}{\cosh^3 x} \quad (1.181)$$

が規格化可能であることから、基底状態として  $\psi_{3,0} \propto \phi_3$  を持ち、その固有値は  $E_{3,0} = 0$ 。また  $\tilde{V}_3$  との超対称性より、絡合子  $A_3^\dagger = -\partial + w_3$  を用いて

$$\psi_{3,1} \propto A_3^\dagger \tilde{\psi}_{3,0} \propto A_3^\dagger \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad E_{3,1} = \tilde{E}_{3,0} = 5, \quad (1.182)$$

$$\psi_{3,2} \propto A_3^\dagger \tilde{\psi}_{3,1} \propto A_3^\dagger \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}, \quad E_{3,2} = \tilde{E}_{3,1} = 8 \quad (1.183)$$

を第 1, 第 2 励起状態として持つ。 $w_3 = 3 \tanh x$  の漸近値が  $w_{3\pm} = \pm 3$  であることから、反射及び透過係数は  $k' = k \equiv \sqrt{E - 9}$  として

$$R_3 = \frac{w_{3-} + ik}{w_{3-} - ik} \tilde{R}_3 = 0, \quad (1.184)$$

$$T_3 = \frac{w_{3+} - ik'}{w_{3-} - ik} \tilde{T}_3 = \frac{3 - ik}{-3 - ik} \cdot \frac{\Gamma(3 - ik)\Gamma(-2 - ik)}{\Gamma(1 - ik)\Gamma(-ik)} = \frac{\Gamma(4 - ik)\Gamma(-3 - ik)}{\Gamma(1 - ik)\Gamma(-ik)}. \quad (1.185)$$

$V_3$  は束縛状態を 3 つ持ち、反射率が 0 の無反射ポテンシャルである。

以下同様の議論を繰り返せば、自然数  $a$  に対してポテンシャル

$$V_a = a^2 - \frac{a(a+1)}{\cosh^2 x} \quad (1.186)$$

は  $a$  個の束縛状態を持つ無反射ポテンシャルで、基底状態は

$$\psi_{a,0} \propto \frac{1}{\cosh^a x}, \quad E_{a,0} = 0, \quad (1.187)$$

励起状態は微分演算子  $A_a^\dagger = -\partial + a \tanh x$  を用いて

$$\psi_{a,n} \propto A_a^\dagger \psi_{a-1,n-1} \propto A_a^\dagger A_{a-1}^\dagger \cdots A_{a-n+1}^\dagger \frac{1}{\cosh^{a-n} x}, \quad (1.188)$$

$$E_{a,n} = E_{a-1,n-1} + a^2 - (a-1)^2 = a^2 - (a-n)^2, \quad (1.189)$$

(ただし  $0 \leq n \leq a-1$ ) と求められ、また反射、透過係数は  $k = \sqrt{E - a^2}$  として

$$R_a = 0, \quad (1.190)$$

$$T_a = \frac{\Gamma(a+1-ik)\Gamma(-a-ik)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)} \quad (1.191)$$

と与えられることがわかる。固有値が求められたことには、先に指摘した形状不変性が効いている。これについては次の節で述べる。

## §2. 形状不変性

この節で述べるのは超対称量子力学の応用の一つに過ぎないのであるが、その有用性と教育的価値を考え、独立な節として扱うことにした。形状不変性 (shape invariance) とは、絡合式

$$AH = \tilde{H}A, \quad (2.1)$$

$$A = \partial + w \quad (2.2)$$

を満たす超対称パートナー  $H, \tilde{H}$  のポテンシャル  $V, \tilde{V}$  が、高々パラメータの違いしかなく、同一の函数形を持つ状況をいう<sup>44)</sup>。すなわち  $a$  をポテンシャルに含まれるパラメータ (結合定数や力の有効距離を想定しておけばよい) として、

$$\tilde{V}(x; a) = V(x; a_1) + R(a_1), \quad a_1 \equiv f(a) \quad (2.3)$$

の関係が成立する場合である。もちろん運動エネルギーを加えて

$$\tilde{H}(x; a) = H(x; a_1) + R(a_1), \quad a_1 \equiv f(a) \quad (2.4)$$

のように書いてもよい。この形状不変性に加え、超対称性が exact な場合 (すなわち基底状態の“消失”がある場合\*) シュレーディンガー方程式の固有値問題は初等的な代数計算で解くことができる。これは調和振動子の昇降演算子法を一般化したものであり、Infeld の因子分解法の再定式化になっている。級数展開法で解けない問題がこの解法で解けるというような例は (少なくとも現在までのところ) 知られておらず、むしろ状況は逆である<sup>18), 45)</sup>。しかしながらこの解法には、見通しのよさという利点がある。

なお散乱問題についても、その透過、反射係数について形状不変性からある程度のことはいえるが、束縛問題ほどの威力は発揮されない<sup>46), 47)</sup>。

### 2.1. 固有値問題の解法

ハミルトニアン  $H, \tilde{H}$  の間に形状不変性 (2.4) が成り立てば、両者は本質的に同一の系であり、単にパラメータの値とポテンシャルの基準が異なるだけである。したがって  $\tilde{H}$  の固有函数は  $H$  の固有函数から単にパラメータの置き換え  $a \rightarrow a_1$  で得られ、固有値についてもパラメータを置き換え  $R(a_1)$  を加えるだけで得られる。これを特に基底状態について見てみると、

$$\tilde{\psi}_0(x; a) = \psi_0(x; a_1), \quad (2.5)$$

$$\tilde{E}_0(a) = E_0(a_1) + R(a_1). \quad (2.6)$$

\* この条件は重要である。たとえ形状不変であっても、超対称性が自発的に破れていればこの章で述べる解法は使えない。具体的には、スーパーポテンシャルの振る舞いが  $w(+\infty) > 0, w(-\infty) < 0$  を満たさねばならない。

一方, exact な超対称系においては,

$$E_1(a) = \tilde{E}_0(a), \quad (2.7)$$

$$\psi_1(x; a) \propto A^\dagger(a) \tilde{\psi}_0(x; a) \quad (2.8)$$

の関係が成立する. したがって  $\tilde{H}$  に関する量を消去すれば

$$E_1(a) = E_0(a_1) + R(a_1), \quad (2.9)$$

$$\psi_1(x; a) \propto A^\dagger(a) \psi_0(x; a_1) \quad (2.10)$$

が得られる.

引き続き第 1 励起状態について, 形状不変性より

$$\tilde{\psi}_1(x; a) = \psi_1(x; a_1), \quad (2.11)$$

$$\tilde{E}_1(a) = E_1(a_1) + R(a_1) \quad (2.12)$$

が成立し, exact な超対称性より

$$E_2(a) = \tilde{E}_1(a), \quad (2.13)$$

$$\psi_2(x; a) \propto A^\dagger(a) \tilde{\psi}_1(x; a) \quad (2.14)$$

が成立するから,

$$E_2(a) = E_1(a_1) + R(a_1), \quad (2.15)$$

$$\psi_2(x; a) \propto A^\dagger(a) \psi_1(x; a_1) \quad (2.16)$$

が得られる. 先に求めた  $E_1, \psi_1$  の表式を用いると

$$E_2(a) = E_0(a_1) + R(a_2) + R(a_1), \quad (2.17)$$

$$\psi_2(x; a) \propto A^\dagger(a) A^\dagger(a_1) \psi_0(x; a_2) \quad (2.18)$$

とも表せる.

以下同様の議論を繰り返すことにより, 全ての固有値と固有状態は基底状態  $E_0, \psi_0$  に結びつけられることがわかる. そして基底状態は  $A$  のゼロモードに等しく, その固有値は因子分解エネルギー  $\epsilon$  に等しい:

$$\psi_0 \propto \phi_- = \exp \left( - \int dx w(x; a) \right), \quad (2.19)$$

$$E_0 = \epsilon(a). \quad (2.20)$$

こうして固有値問題は完全に解かれるのである\*). この状況を Fig.3 に示しておく.  $f(a), R(a)$  のパラメータ操作で右上に行き,  $A^\dagger$  の操作で左に行くわけである.

一般的な表式を与えておこう. 形状不変な系では  $a_1 \equiv f(a)$  として

$$\tilde{E}_n(a) = E_n(a_1) + R(a_1), \quad (2.21)$$

$$\tilde{\psi}_n(x; a) = \psi_n(x; a_1) \quad (2.22)$$

\*) もちろん, 任意のポテンシャル  $V(x; a)$  について exact な超対称性を与えるスーパーポテンシャル  $w(x; a)$  及びその因子分解エネルギー  $\epsilon$  が解析的に知られているわけではない.  $w$  に対する Riccati 方程式は非線形で, 一般に求積法では解けないのである. したがって現実的には, よく知られた例題についてはその exact なスーパーポテンシャルを覚えておく, というくらいのことしかできない. 形状不変性によって解ける問題のリストは<sup>18), 48)</sup>などに与えられている.

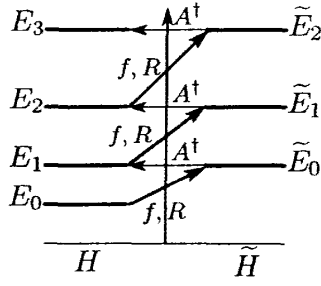


Fig. 3. 形状不変性

が成立し, exact な超対称系では

$$E_0 = \epsilon, \quad \psi_0 \propto \phi_- = \exp\left(-\int dx w\right), \quad (2.23)$$

$$\tilde{E}_n = E_{n+1} \quad (n \geq 0), \quad (2.24)$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1} - E_0}} A^\dagger \tilde{\psi}_n \quad (n \geq 0) \quad (2.25)$$

が成立する. これらを結合して

$$E_0 = \epsilon(a), \quad \psi_0(x; a) \propto \phi_- = \exp\left(-\int dx w(x; a)\right), \quad (2.26)$$

$$E_{n+1}(a) = E_n(a_1) + R(a_1) \quad (n \geq 0), \quad (2.27)$$

$$\psi_{n+1}(x; a) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}(a) - E_0(a)}} A^\dagger(a) \psi_n(x; a_1) \quad (n \geq 0) \quad (2.28)$$

あるいは  $a_n \equiv f(a_{n-1})$  として

$$E_0 = \epsilon(a), \quad \psi_0(x; a) \propto \phi_- = \exp\left(-\int dx w(x; a)\right), \quad (2.29)$$

$$E_n = E_0(a_n) + \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad (n \geq 1), \quad (2.30)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \sqrt{E_k(a_{n-k}) - E_0(a_{n-k})}} \prod_{l=0}^{n-1} A^\dagger(a_l) \psi_0(x; a_n) \quad (n \geq 1) \quad (2.31)$$

を得る. 積記号については番号の小さい順に左から並べる.

(コメント 1)

因子分解法との一致については文献<sup>49), 50)</sup>を参照のこと.

(コメント 2)

形状不変な超対称系を構成するスーパーポテンシャル  $w(x; a)$  としては, Riccati 方程式の一般解である 1 パラメータ族を用いるべきではなく, その特解を用いるべきであることは (1.70) の複雑な函数形より明らかであるが, 念のため証明を望むのであれば<sup>51)</sup>を見るとよい.

(コメント 3)

以下の例題に見るパラメータ函数  $f(a)$  は全て  $a_1 = a + \text{const.}$  の形をしている. 現在までのところ, それ以外のパラメータ函数としては  $a_1 = qa$  という定数倍のものしか見つかっておらず, しかもその場合のポテンシャルは級数展開の形でしか得られていない<sup>52), 53)</sup>.

## 2.2. 例題

この節では実際にいくつかの固有値問題を解いてみるが、今まで省略してきたプランク定数  $\hbar$ 、質量  $m$  を復活させておく\*)。絡合子は

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\partial + w = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\psi_0\partial\psi_0^{-1}, \quad (2.32)$$

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\partial + w = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\psi_0^{-1}\partial\psi_0, \quad (2.33)$$

基底状態  $\psi_0$  とスーパーポテンシャル  $w$  の関係は

$$\psi_0 = \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w\right), \quad (2.34)$$

パートナーポテンシャル  $V, \tilde{V}$  とスーパーポテンシャルの関係は

$$V = w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' + E_0, \quad (2.35)$$

$$\tilde{V} = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' + E_0 \quad (2.36)$$

である。

## 2.2.1. 調和振動子

調和振動子

$$V = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (2.37)$$

に対するシュレーディンガー方程式の固有値問題を解く。スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' + E_0 = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (2.38)$$

の解として

$$w = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega x \quad (2.39)$$

の形を仮定すると、

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.40)$$

のとき解となる。パートナーポテンシャルは

$$\tilde{V} = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' + E_0 \quad (2.41)$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \hbar\omega \quad (2.42)$$

$$= V + \hbar\omega \quad (2.43)$$

となって形状不変である。パラメータ函数、剰余項は

$$\omega_1 = \omega \implies \omega_k = \omega, \quad (2.44)$$

$$R(\omega_k) = \hbar\omega \quad (2.45)$$

---

\*) 結果の確認には書籍<sup>54)</sup>の第 10 講が利用できる。

となり  $k$  によらない。よってエネルギー固有値は

$$E_n = E_0(\omega_n) + \sum_{k=1}^n R(\omega_k) \quad (2.46)$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (2.47)$$

固有函数を求める。まず基底状態が

$$\psi_0 \propto \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w\right) \quad (2.48)$$

$$= \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right), \quad (2.49)$$

規格化すれば

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right). \quad (2.50)$$

励起状態は  $A^\dagger = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}\partial\psi_0$  を用いて

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \sqrt{E_k(\omega_{n-k}) - E_0(\omega_{n-k})}} \prod_{l=0}^{n-1} A^\dagger(\omega_l) \psi_0(x; \omega_n) \quad (2.51)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!(\hbar\omega)^n}} \psi_0^{-1} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\partial\right)^n \psi_0^2 \quad (2.52)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \times (-1)^n \exp\left(\frac{m\omega}{\hbar} x^2\right) \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\partial\right)^n \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} x^2\right) \quad (2.53)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right). \quad (2.54)$$

ただし  $H_n(x)$  はエルミート多項式である。

### 2.2.2. Eckart ポテンシャル

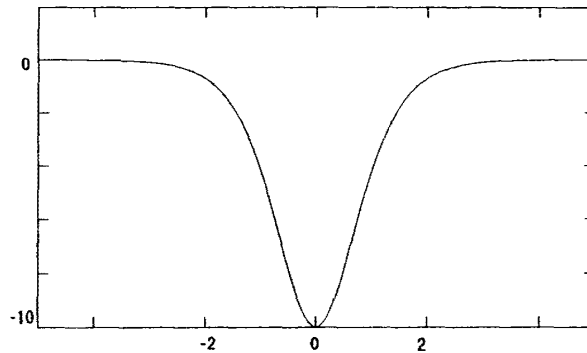


Fig. 4. Eckart ポテンシャル ( $V_0 = 10, \kappa = 1$ )

Eckart ポテンシャル

$$V = -\frac{V_0}{\cosh^2 \kappa x} \quad (V_0 > 0, \kappa > 0) \quad (2.55)$$



に対するシュレーディンガー方程式の固有値問題を解く。スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 = -\frac{V_0}{\cosh^2 \kappa x} \quad (2.56)$$

の解として

$$w = \frac{\hbar a}{\sqrt{2m}} \tanh \kappa x \quad (2.57)$$

の形を仮定すると（因子  $\hbar/\sqrt{2m}$  は単に計算上の便宜のため導入した），

$$w^2 = \frac{\hbar^2 a^2}{2m} \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 \kappa x} \right), \quad (2.58)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' = \frac{\hbar^2 a \kappa}{2m} \frac{1}{\cosh^2 \kappa x} \quad (2.59)$$

より

$$\frac{\hbar^2 a^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\cosh^2 \kappa x} + E_0 = -\frac{V_0}{\cosh^2 \kappa x}. \quad (2.60)$$

したがって

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}, \quad (2.61)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} a(a+\kappa) = V_0 \quad (2.62)$$

であれば解となる。ただし基底状態の規格化可能性のため  $w(+\infty) > 0, w(-\infty) < 0$  でなければならないから  $a > 0$ ，したがって  $a$  についての 2 次方程式 (2.62) の解として

$$a = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} - \frac{\kappa}{2} \quad (2.63)$$

をとらねばならない。 $a$  を用いてポテンシャルは

$$V(x; a) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\cosh^2 \kappa x} \quad (2.64)$$

と表され，パートナーポテンシャルは

$$\tilde{V}(x; a) = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 \quad (2.65)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-\kappa)}{\cosh^2 \kappa x} \quad (2.66)$$

$$= V(x; a - \kappa) \quad (2.67)$$

となって形状不変である。パラメータ函数，剰余項は

$$a_1 = a - \kappa \implies a_k = a - k\kappa, \quad (2.68)$$

$$R(a_k) = 0. \quad (2.69)$$

よってエネルギー固有値は

$$E_n = E_0(a_n) + \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad (2.70)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}(a - n\kappa)^2 \quad (2.71)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\kappa \right\}^2. \quad (2.72)$$

固有函数を求める。まず基底状態が

$$\psi_0 \propto \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w\right) \quad (2.73)$$

$$= \frac{1}{\cosh^{a/\kappa} \kappa x}. \quad (2.74)$$

$V_0 > 0$  であれば  $a > 0$  であるからこれは規格化可能であり、引力型 Eckart ポテンシャルは少なくとも 1 つ束縛状態を持つ。励起状態は  $A^\dagger(a) = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}(a)\partial\psi_0(a)$  を用いて

$$\psi_n(x) \propto \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \psi_0(x; a_n) \quad (2.75)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \frac{1}{\cosh^{a/\kappa-n} \kappa x} \quad (2.76)$$

の計算で求まる。これが規格化可能であるためには  $a/\kappa - n > 0$  \*)、すなわち

$$V_0 > \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} n(n+1) \quad (2.77)$$

でなければならない。すなわちポテンシャルの深さによって、保持可能な束縛状態の個数が違ってくる。深さ  $V_0$  における束縛状態の個数  $n+1$  は

$$n < \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{8mV_0}{\hbar^2 \kappa^2} + 1} - 1 \right) \quad (2.78)$$

で制限される。

### 2.2.3. Morse ポテンシャル

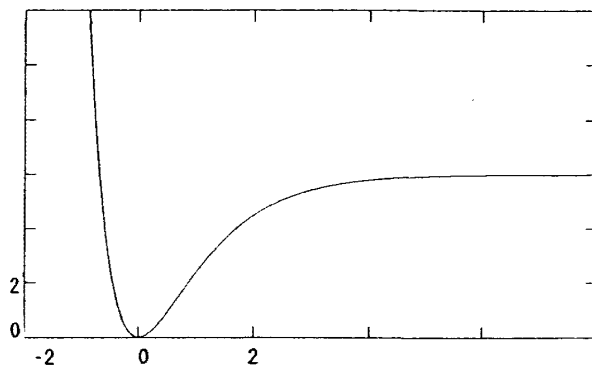


Fig. 5. Morse ポテンシャル ( $V_0 = 6, \kappa = 1$ )

Morse ポテンシャル<sup>55), 56)</sup>

$$V = V_0(1 - e^{-\kappa x})^2 \quad (V_0 > 0, \kappa > 0) \quad (2.79)$$

\*) (1.27) 以下で述べたように、絡合子  $A^\dagger$  の作用は規格化可能性を壊さない。

に対するシュレーディンガー方程式の固有値問題を解く．スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' + E_0 = V_0 - 2V_0e^{-\kappa x} + V_0e^{-2\kappa x} \quad (2.80)$$

の解として

$$w = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}(ae^{-\kappa x} + b) \quad (2.81)$$

の形を仮定すると,

$$w^2 = \frac{\hbar^2}{2m}(a^2e^{-2\kappa x} + 2abe^{-\kappa x} + b^2), \quad (2.82)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' = -\frac{\hbar^2}{2m}a\kappa e^{-\kappa x} \quad (2.83)$$

より

$$\frac{\hbar^2 a^2}{2m}e^{-2\kappa x} + \frac{\hbar^2}{2m}a(2b + \kappa)e^{-\kappa x} + \frac{\hbar^2 b^2}{2m} + E_0 = V_0e^{-2\kappa x} - 2V_0e^{-\kappa x} + V_0. \quad (2.84)$$

したがって

$$E_0 = V_0 - \frac{\hbar^2 b^2}{2m}, \quad (2.85)$$

$$\frac{\hbar^2 a^2}{2m} = V_0, \quad (2.86)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}a(2b + \kappa) = -2V_0 \quad (2.87)$$

であれば解となる．ただし基底状態の規格化可能性のため  $w(+\infty) > 0, w(-\infty) < 0$  でなければならないから  $a < 0, b > 0$ ，したがって  $a$  についての 2 次方程式 (2.86) の解として

$$a = -\sqrt{V_0} \quad (2.88)$$

をとらねばならず，また (2.87) より

$$b = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} - \frac{\kappa}{2} \quad (2.89)$$

を得るが，これが正であるためには

$$V_0 > \frac{\hbar^2 \kappa^2}{8m} \quad (2.90)$$

だけの深さが必要である． $a, b$  を用いてポテンシャルは

$$V(x; a, b) = a^2 e^{-2\kappa x} + \frac{\hbar^2}{2m}a(2b + \kappa)e^{-\kappa x} + a^2 \quad (2.91)$$

と表され，そのパートナーポテンシャルは

$$\tilde{V}(x; a, b) = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}w' + E_0 \quad (2.92)$$

$$= a^2 e^{-2\kappa x} + \frac{\hbar^2}{2m}a(2b - \kappa)e^{-\kappa x} + a^2 \quad (2.93)$$

$$= V(x; a, b - \kappa) \quad (2.94)$$

となって形状不変である。パラメータ函数, 剰余項は

$$b_1 = b - \kappa \implies b_k = b - k\kappa, \quad (2.95)$$

$$R(b_k) = 0. \quad (2.96)$$

よってエネルギー固有値は

$$E_n = E_0(b_n) + \sum_{k=1}^n R(b_k) \quad (2.97)$$

$$= V_0 - \frac{\hbar^2}{2m}(b - n\kappa)^2 \quad (2.98)$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \kappa \sqrt{\frac{2V_0}{m}} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}. \quad (2.99)$$

固有函数はまず基底状態が

$$\psi_0 \propto \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w\right) \quad (2.100)$$

$$= \exp\left(-\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar \kappa} e^{-\kappa x} - bx\right). \quad (2.101)$$

励起状態は  $A^\dagger(b) = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}(b)\partial\psi_0(b)$  を用いて

$$\psi_n(x) \propto \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(b_k) \psi_0(x; b_n) \quad (2.102)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \exp\left(-\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar \kappa} e^{-\kappa x} - (b - n\kappa)x\right) \quad (2.103)$$

の計算で求まる。これが規格化可能であるためには  $b - n\kappa > 0$ , すなわち

$$V_0 > \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} \quad (2.104)$$

でなければならない。深さ  $V_0$  における束縛状態の個数  $n+1$  は

$$n < \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar \kappa} - \frac{1}{2} \quad (2.105)$$

で制限される。

#### 2.2.4. Pöschl-Teller ポテンシャル

Pöschl-Teller ポテンシャル<sup>57)</sup>

$$V = \frac{A}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\cos^2 \kappa x} \quad (0 \leq \kappa x \leq \frac{\pi}{2}; A > 0, B > 0) \quad (2.106)$$

に対するシュレーディンガー方程式の固有値問題を解く。スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 = \frac{A}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\cos^2 \kappa x} \quad (2.107)$$

の解として

$$w = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{a}{\tan \kappa x} + b \tan \kappa x \right) \quad (2.108)$$

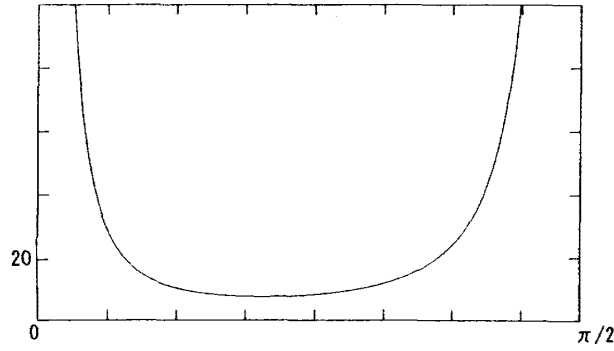


Fig. 6. Pöschl-Teller ポテンシャル ( $A = 1, B = 3, \kappa = 1$ )

の形を仮定すると,

$$w^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{a^2}{\sin^2 \kappa x} + \frac{b^2}{\cos^2 \kappa x} - (a-b)^2 \right), \quad (2.109)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' = \frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{a\kappa}{\sin^2 \kappa x} + \frac{b\kappa}{\cos^2 \kappa x} \right) \quad (2.110)$$

より

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{b(b-\kappa)}{\cos^2 \kappa x} - \frac{\hbar^2}{2m} (a-b)^2 + E_0 = \frac{A}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\cos^2 \kappa x}. \quad (2.111)$$

したがって

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (a-b)^2, \quad (2.112)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} a(a+\kappa) = A, \quad (2.113)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} b(b-\kappa) = B \quad (2.114)$$

であれば解となる。ただし基底状態の規格化可能性のため  $w(\pi/2\kappa - 0) > 0, w(+0) < 0$  でなければならないから  $a < 0, b > 0$ , したがって 2 次方程式 (2.113), (2.114) の解として

$$a = -\frac{\kappa}{2} - \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}}, \quad (2.115)$$

$$b = \frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} \quad (2.116)$$

をとらねばならない。  $a, b$  を用いてポテンシャルは

$$V(x; a, b) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{b(b-\kappa)}{\cos^2 \kappa x} \quad (2.117)$$

と表され, パートナーポテンシャルは

$$\tilde{V}(x; a, b) = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 \quad (2.118)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{b(b+\kappa)}{\cos^2 \kappa x} \quad (2.119)$$

$$= V(x; a-\kappa, b+\kappa) \quad (2.120)$$

となって形状不変である。パラメータ函数, 剰余項は

$$a_1 = a - \kappa \implies a_k = a - k\kappa, \quad (2.121)$$

$$b_1 = b + \kappa \implies b_k = b + k\kappa, \quad (2.122)$$

$$R(a_k, b_k) = 0. \quad (2.123)$$

よってエネルギー固有値は

$$E_n = E_0(a_n, b_n) + \sum_{k=1}^n R(a_k, b_k) \quad (2.124)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (a - b - 2n\kappa)^2 \quad (2.125)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} + \sqrt{\frac{2MB}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} + (2n+1)\kappa \right\}^2. \quad (2.126)$$

固有函数を求める。まず基底状態が

$$\psi_0 \propto \exp \left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w \right) \quad (2.127)$$

$$= \sin^{-a/\kappa} \kappa x \cos^{b/\kappa} \kappa x. \quad (2.128)$$

励起状態は  $A^\dagger(a, b) = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}(a, b)\partial\psi_0(a, b)$  を用いて

$$\psi_n(x) \propto \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k, b_k) \psi_0(x; a_n, b_n) \quad (2.129)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k, b_k) \sin^{-a/\kappa+n} \kappa x \cos^{b/\kappa+n} \kappa x \quad (2.130)$$

の計算で求まる。これらは全て規格化可能である。

### 2.2.5. 三角 Rosen-Morse ポテンシャル

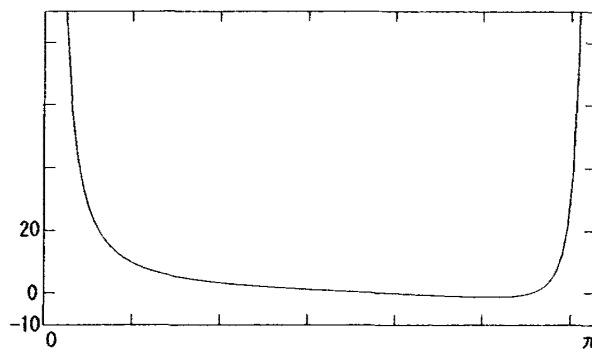


Fig. 7. 三角 Rosen-Morse ポテンシャル ( $A = 3, B = \kappa = 1$ )

三角 Rosen-Morse ポテンシャル

$$V = \frac{A}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x} \quad (0 \leq \kappa x \leq \pi; A > 0, B > 0, \kappa > 0) \quad (2.131)$$

に対するシュレーディンガー方程式の固有値問題を解く。スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 = \frac{A}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x} \quad (2.132)$$

の解として

$$w = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{a}{\tan \kappa x} + b \right) \quad (2.133)$$

の形を仮定すると,

$$w^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ a^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \kappa x} - 1 \right) + \frac{2ab}{\tan \kappa x} + b^2 \right\}, \quad (2.134)$$

$$w' = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a\kappa}{\sin^2 \kappa x} \quad (2.135)$$

より

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{ab}{\tan \kappa x} - \frac{\hbar^2}{2m} (a^2 - b^2) + E_0 = \frac{A}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x}. \quad (2.136)$$

したがって

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (a^2 - b^2), \quad (2.137)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} a(a+\kappa) = A, \quad (2.138)$$

$$\frac{\hbar^2}{m} ab = B \quad (2.139)$$

であれば解となる。ただし基底状態の規格化可能性のため  $w(\pi/2\kappa - 0) > 0, w(+0) < 0$  でなければならないから  $a < 0$ , したがって 2 次方程式 (2.138) の解として

$$a = -\frac{\kappa}{2} - \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} \quad (2.140)$$

をとらねばならない。  $a, b$  を用いてポテンシャルは

$$V(x; a, b) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{ab}{\tan \kappa x} \quad (2.141)$$

と表され、パートナーポテンシャルは

$$\tilde{V}(x; a, b) = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 \quad (2.142)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{ab}{\tan \kappa x} \quad (2.143)$$

となって形状不変でない。しかしパラメータとして  $(a, b)$  ではなく, (2.139) より  $(a, B)$  を用いると

$$V(x; a, B) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x} \quad (2.144)$$

$$\tilde{V}(x; a, B) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-\kappa)}{\sin^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x} \quad (2.145)$$

$$= V(x; a - \kappa, B) \quad (2.146)$$

となって形状不変である。パラメータ函数, 剰余項は

$$a_1 = a - \kappa \implies a_k = a - k\kappa, \quad (2.147)$$

$$R(a_k) = 0. \quad (2.148)$$

基底エネルギー (2.137) は (2.139) より

$$E_0 = \frac{\hbar^2 a^2}{2m} - \frac{mB^2}{2\hbar^2} \frac{1}{a^2} \quad (2.149)$$

と表されるから、エネルギー固有値は

$$E_n = E_0(a_n) + \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad (2.150)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} (a - n\kappa)^2 - \frac{mB^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(a - n\kappa)^2} \quad (2.151)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \kappa \right\}^2 - \frac{mB^2/2\hbar^2}{\left\{ \sqrt{2mA/\hbar^2 + \kappa^2/4} + (n + 1/2)\kappa \right\}^2}. \quad (2.152)$$

固有函数を求める。まず基底状態が

$$\psi_0 \propto \exp \left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w \right) \quad (2.153)$$

$$= \exp \left( -\frac{mB^2}{\hbar^2} \frac{x}{a} \right) \sin^{-a/\kappa} \kappa x. \quad (2.154)$$

励起状態は  $A^\dagger(a) = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}(a)\partial\psi_0(a)$  を用いて

$$\psi_n(x) \propto \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \psi_0(x; a_n) \quad (2.155)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \exp \left( -\frac{mB}{\hbar^2} \frac{x}{a - n\kappa} \right) \sin^{-a/\kappa+n} \kappa x \quad (2.156)$$

の計算で求まる。これらは全て規格化可能である。

#### 2.2.6. 双曲 Rosen-Morse ポテンシャル

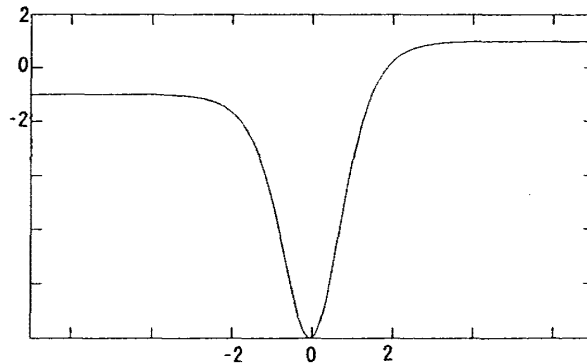


Fig. 8. 双曲 Rosen-Morse ポテンシャル ( $A = 10, B = 1, \kappa = 1$ )

双曲 Rosen-Morse ポテンシャル<sup>58), 59)</sup>

$$V = -\frac{A}{\cosh^2 \kappa x} + B \tanh \kappa x \quad (A > 0, B > 0, \kappa > 0) \quad (2.157)$$



に対するシュレーディンガー方程式の固有値問題を解く．これは  $B \rightarrow 0$  の極限で Eckart ポテンシャルに帰着する．スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 = -\frac{A}{\cosh^2 \kappa x} + B \tanh \kappa x \quad (2.158)$$

の解として

$$w = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} (a \tanh \kappa x + b) \quad (2.159)$$

の形を仮定すると,

$$w^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -\frac{a^2}{\cosh^2 \kappa x} + 2ab \tanh \kappa x + a^2 + b^2 \right\}, \quad (2.160)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a\kappa}{\cosh^2 \kappa x} \quad (2.161)$$

より

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\cosh^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{m} ab \tanh \kappa x + \frac{\hbar^2}{2m} (a^2 + b^2) + E_0 = -\frac{A}{\cosh^2 \kappa x} + B \tanh \kappa x. \quad (2.162)$$

したがって

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} (a^2 + b^2), \quad (2.163)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} a(a+\kappa) = A, \quad (2.164)$$

$$\frac{\hbar^2}{m} ab = B \quad (2.165)$$

であれば解となる．ただし基底状態の規格化可能性のため  $w(\infty) > 0, w(-\infty) < 0$  でなければならないから  $a+b > 0, -a+b < 0$ , すなわち  $a > 0, -a < b < a$ . したがって 2 次方程式 (2.164) の解として

$$a = -\frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} \quad (2.166)$$

をとらねばならず, また (2.165) より  $B < \hbar^2 a^2/m$  すなわち

$$B < \frac{\hbar^2}{m} \left( \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} - \frac{\kappa}{2} \right)^2 \quad (2.167)$$

を満たさねば束縛状態は存在しない． $a, b$  を用いてポテンシャルは

$$V(x; a) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+\kappa)}{\cosh^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{m} ab \tanh \kappa x \quad (2.168)$$

と表され, パートナーポテンシャルは

$$\tilde{V} = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 \quad (2.169)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-\kappa)}{\cosh^2 \kappa x} + \frac{\hbar^2}{m} ab \tanh \kappa x \quad (2.170)$$

となって形状不変でない。しかしパラメータとして  $(a, b)$  ではなく, (2.165) より  $(a, B)$  を用いると

$$V(x; a, B) = \frac{\hbar^2 a(a + \kappa)}{2m \cosh^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x} \quad (2.171)$$

$$\tilde{V}(x; a, B) = \frac{\hbar^2 a(a - \kappa)}{2m \cosh^2 \kappa x} + \frac{B}{\tan \kappa x} \quad (2.172)$$

$$= V(x; a - \kappa, B) \quad (2.173)$$

となって形状不変である。パラメータ函数, 剰余項は

$$a_1 = a - \kappa \implies a_k = a - k\kappa, \quad (2.174)$$

$$R(a_k) = 0. \quad (2.175)$$

基底エネルギー (2.163) は (2.165) より

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m} - \frac{mB^2}{2\hbar^2} \frac{1}{a^2} \quad (2.176)$$

と表されるから, エネルギー固有値は

$$E_n = E_0(a_n) + \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad (2.177)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} (a - n\kappa)^2 - \frac{mB^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(a - n\kappa)^2} \quad (2.178)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \kappa \right\}^2 - \frac{mB^2/2\hbar^2}{\left\{ \sqrt{2mA/\hbar^2 + \kappa^2/4} - (n + 1/2)\kappa \right\}^2}. \quad (2.179)$$

固有函数を求める。まず基底状態が

$$\psi_0 \propto \exp \left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dx w \right) \quad (2.180)$$

$$= \exp \left( -\frac{mB^2}{\hbar^2} \frac{x}{a} \right) \cosh^{-a/\kappa} \kappa x. \quad (2.181)$$

励起状態は  $A^\dagger(a) = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}(a)\partial\psi_0(a)$  を用いて

$$\psi_n(x) \propto \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \psi_0(x; a_n) \quad (2.182)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} A^\dagger(a_k) \exp \left( -\frac{mB}{\hbar^2} \frac{x}{a - n\kappa} \right) \cosh^{-a/\kappa + n} \kappa x \quad (2.183)$$

の計算で求まる。これが規格化可能であるためには  $B < \hbar^2(a - n\kappa)^2/m$  すなわち

$$B < \frac{\hbar^2}{m} \left\{ \sqrt{\frac{2mA}{\hbar^2} + \frac{\kappa^2}{4}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \kappa \right\}^2. \quad (2.184)$$

すなわち束縛状態の個数  $n+1$  は

$$n < \frac{\sqrt{2mA + \hbar^2 \kappa^2}}{\hbar \kappa} - \frac{\sqrt{mB}}{\hbar \kappa} - \frac{1}{2} \quad (2.185)$$

で制限される.

### 2.2.7. 水素原子

水素原子の有効ポテンシャル

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (2.186)$$

に対する動径方向シュレーディンガー方程式の固有値問題を解く. スーパーポテンシャル方程式

$$w^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (2.187)$$

の解として

$$w = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{a}{r} + b \right) \quad (2.188)$$

の形を仮定すると,

$$w^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{a^2}{r^2} + \frac{2ab}{r} + b^2 \right), \quad (2.189)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a}{r^2} \quad (2.190)$$

より

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+1)}{r^2} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{ab}{r} + \frac{\hbar^2 b^2}{2m} + E_0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}. \quad (2.191)$$

したがって

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 b^2}{2m}, \quad (2.192)$$

$$a(a+1) = l(l+1), \quad (2.193)$$

$$\frac{\hbar^2}{m} ab = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.194)$$

であれば解となる. ただし基底状態の規格化可能性のため  $w(\infty) > 0$  でなければならないから  $b > 0$ , したがって (2.194) より  $a < 0$  となり,  $a$  についての 2 次方程式 (2.193) の解として

$$a = -(l+1) \quad (2.195)$$

をとらねばならない.  $a, b$  を用いてポテンシャルは

$$V(r; a, b) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+1)}{r^2} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{ab}{r} \quad (2.196)$$

と表され, パートナーポテンシャルは

$$\tilde{V} = w^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w' + E_0 \quad (2.197)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-1)}{r^2} + \frac{\hbar^2}{m} \frac{ab}{r} \quad (2.198)$$

となって形状不変ではない。しかしパラメータとして  $(a, b)$  ではなく, (2.194) より  $(a, e)$  を用いると

$$V(r; a, e) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.199)$$

$$\tilde{V}(r; a, e) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{a(a-1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.200)$$

$$= V(r; a-1, e) \quad (2.201)$$

となって形状不変である。あるいは  $a$  よりむしろ  $l$  を用いて

$$V(r; l) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.202)$$

$$\tilde{V}(r; l) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.203)$$

$$= V(r; l+1) \quad (2.204)$$

と見てもよい。パラメータ函数, 剰余項は

$$l_1 = l + 1 \implies l_k = l + k, \quad (2.205)$$

$$R(l_k) = 0. \quad (2.206)$$

基底エネルギー (2.192) は (2.194) および (2.195) より

$$E_0(l) = - \left( \frac{\sqrt{2me^2}}{8\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{(l+1)^2}. \quad (2.207)$$

と表されるから, エネルギー固有値は

$$E_{n_r}(l) = E_0(l_{n_r}) + \sum_{k=1}^{n_r} R(l_k) \quad (2.208)$$

$$= - \left( \frac{\sqrt{2me^2}}{8\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{(l+n_r+1)^2}. \quad (2.209)$$

固有函数を求める。まず基底状態が

$$\psi_0(r; l) \propto \exp \left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int dr w \right) \quad (2.210)$$

$$= r^{l+1} \exp \left( -\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \frac{r}{l+1} \right). \quad (2.211)$$

励起状態は  $A^\dagger(l) = -(\hbar/\sqrt{2m})\psi_0^{-1}(l)\partial\psi_0(l)$  を用いて

$$\psi_{n_r}(r; l) \propto \prod_{k=0}^{n_r-1} A^\dagger(l_k) \psi_0(r; l_{n_r}) \quad (2.212)$$

$$= \prod_{k=0}^{n_r-1} A^\dagger(a_k) r^{l+n_r+1} \exp \left( -\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \frac{r}{l+n_r+1} \right) \quad (2.213)$$

の計算で求まる。

## §3. 多重超対称系

この節では、超対称量子力学の拡張理論について述べる。超対称量子力学において最も重要なのは絡合関係式であると考えられる。絡合関係式こそが（準位の消失に関する注意は必要であるが）パートナー系の等スペクトル性を保証するものである。そこで絡合子として、前節までで見たような運動量について1次のもの以外の可能性を考えてみたくなる。このような運動量について高次の絡合子で絡合する等スペクトル系を多重超対称系と呼ぶ。

この節においても考えるハミルトニアンは非相対論的であり、

$$H = -\partial^2 + V(x), \quad (3.1)$$

$$\tilde{H} = -\partial^2 + \tilde{V}(x), \quad (3.2)$$

また絡合関係式もこれまで同様

$$AH = \tilde{H}A, \quad (3.3)$$

である。

## 3.1. 2重超対称系

## 3.1.1. 2重超対称系の直接的構成法

絡合子  $A$  として運動量について2次まで含むもの（これを簡単に2次絡合子と呼ぼう）を考えてみる。<sup>24), 25)</sup>

$$A = u(x)\partial^2 + v(x)\partial + w(x). \quad (3.4)$$

$u(x), v(x), w(x)$  は実函数。これを (1.5) に代入すれば  $u, v, w, V, \tilde{V}$  に対する方程式として

$$u' = 0, \quad (3.5)$$

$$u(\tilde{V} - V) - u'' - 2v' = 0, \quad (3.6)$$

$$v(\tilde{V} - V) - 2uV' - v'' - 2w' = 0, \quad (3.7)$$

$$w(\tilde{V} - V) - uV'' - vV' - w'' = 0 \quad (3.8)$$

が得られる。(3.5) より一般性を失うことなく  $u = 1$  としてよい（絡合子には定数倍だけの不定性がある）。すると (3.6) より

$$\tilde{V} - V = 2v', \quad (3.9)$$

が得られ、これを (3.7), (3.8) に代入することで

$$V + w = \frac{1}{2}(v^2 - v') + c, \quad (3.10)$$

$$(V + w)'' = 2(V + w)v' - 2v'V - vV', \quad (3.11)$$

を得る。 $c$  は積分定数。 $(V + w)$  を消去し  $v$  を乗じれば

$$(v^2V)' = \left( \frac{v^4}{4} + cv^2 - v^2v' + \frac{vv''}{2} - \frac{v'^2}{4} \right)' \quad (3.12)$$

となる。したがって  $v \neq 0$  のとき、

$$V = \frac{v^2}{4} + c - v' + \frac{v''}{2v} - \frac{v'^2}{4v^2} + \frac{d}{v^2}, \quad (3.13)$$

$$\tilde{V} = \frac{v^2}{4} + c + v' + \frac{v''}{2v} - \frac{v'^2}{4v^2} + \frac{d}{v^2}, \quad (3.14)$$

また (3.10) より

$$w = \frac{v^2}{4} + \frac{v'}{2} - \frac{v''}{2v} + \frac{v'^2}{4v^2} - \frac{d}{v^2} \quad (3.15)$$

を得る.  $d$  は積分定数. 函数  $v(x)$  は任意であり, その函数形を選ぶことで等スペクトル系  $V, \tilde{V}$  が構成される.

なお  $v(x) = 0$  のとき (3.12) は自明に成立するが, (3.9) より  $\tilde{V} = V$  という通常の対称性に落ちる. このとき絡合式 (3.3) は交換関係  $[A, H] = 0$  となり, 絡合子は保存量となるが, (3.10) より  $w = c - V$  であるから

$$A = \partial^2 + c - V \quad (3.16)$$

$$= c - H \quad (3.17)$$

となり興味を引かない.

### 3.1.2. 2次絡合子の積とハミルトニアン

$A$  と  $A^\dagger$  の積をとって少々計算すると, 次の関係が得られる.

$$A^\dagger A = (H - c)^2 - d, \quad (3.18)$$

$$AA^\dagger = (\tilde{H} - c)^2 - d. \quad (3.19)$$

したがって (1.90), (1.91) で定義したスーパーハミルトニアン, スーパーチャージを用いると

$$\{Q, Q^\dagger\} = H^2 - d\mathbf{1}, \quad (3.20)$$

ただし  $\mathbf{1}$  は  $2 \times 2$  単位行列. これは (1.92) 及び (1.94) と合わせて, 非線形に拡張された超対称代数をなす.

(3.18), (3.19) はまた

$$A^\dagger A = (H - c - \sqrt{d})(H - c + \sqrt{d}), \quad (3.21)$$

$$AA^\dagger = (\tilde{H} - c - \sqrt{d})(\tilde{H} - c + \sqrt{d}) \quad (3.22)$$

とも表せる. これらに  $H, \tilde{H}$  の固有値  $E$  に属する固有函数  $\psi_E, \tilde{\psi}_E$  を左右からかけて全定義域にわたって積分し,  $A, A^\dagger$  が互いにエルミート共役であることを用いると,

$$\int dx (A\psi_E)^2 = (E - c - \sqrt{d})(E - c + \sqrt{d}) \int dx \psi_E^2, \quad (3.23)$$

$$\int dx (A^\dagger \tilde{\psi}_E)^2 = (E - c - \sqrt{d})(E - c + \sqrt{d}) \int dx \tilde{\psi}_E^2 \quad (3.24)$$

の関係を得る. したがって  $\psi_E, \tilde{\psi}_E$  が  $A, A^\dagger$  のゼロモードでない限り,  $\psi_E$  が規格化可能ならば  $A\psi_E$  も規格化可能であり,  $\tilde{\psi}_E$  が規格化可能ならば  $A^\dagger \tilde{\psi}_E$  も規格化可能である. また定義域が  $(-\infty, \infty)$  の場合, 規格化可能であれば無限遠で 0 という境界条件を満たすから,  $A, A^\dagger$  の作用は境界条件を破らない.

また上式より特に  $d > 0$  のとき

$$E \leq c - \sqrt{d}, \quad c + \sqrt{d} \leq E \quad (3.25)$$

(等号は  $A\psi_E = 0$  ないし  $A^\dagger \tilde{\psi}_E = 0$  のとき成立) であることがわかる.

## 3.1.3. 2次絡合子のゼロモードと準位消失

構成された2重超対称系は基本的に等スペクトルであるが、通常の超対称系同様、準位の消失の可能性を検討しなければならない。絡合子のゼロモードが規格化可能なとき、準位の消失が起こりうるのであった。そこでまず2次絡合子のゼロモードを調べる必要がある<sup>60)</sup>。2次絡合子のゼロモード  $\phi_{\mp}$  を

$$A\phi_{-} \equiv 0, \quad (3.26)$$

$$A^{\dagger}\phi_{+} \equiv 0 \quad (3.27)$$

で定義する。 $\phi_{\mp}$  に (3.21), (3.22) を作用させれば、

$$(H - c - \sqrt{d})(H - c + \sqrt{d})\phi_{-} = 0, \quad (3.28)$$

$$(\tilde{H} - c - \sqrt{d})(\tilde{H} - c + \sqrt{d})\phi_{+} = 0 \quad (3.29)$$

を得る。したがってもし  $\phi_{\mp}$  が規格化可能ならば、それは  $H, \tilde{H}$  の固有値  $c + \sqrt{d}$  または  $c - \sqrt{d}$  に属する固有函数である。ハミルトニアン<sup>61)</sup>のエルミート性より、固有値の実数性は保証されているので、 $d \geq 0$  でなければならない。したがって  $d < 0$  の場合、 $\phi_{\mp}$  はともに規格化可能ではあり得ない。このとき準位の消失は起こらず、両系のスペクトルは完全に一致することになる。

1次絡合子を用いる通常の超対称系の場合、ゼロモードがハミルトニアンの固有値であれば、(1.28) よりそれは必ず基底状態であった。しかし2次の絡合子を用いる場合、それに相当する制限は (3.25) に置き換わっている。したがって2重超対称系においては、準位消失は励起状態でも起こりうる<sup>61)</sup>。

2次絡合子のゼロモードについての考察を続ける。ゼロモード  $\phi_{\mp}$  を求めるには、(3.4) 及び  $u = 1$  を用いて (3.26), (3.27) をあらわに書いた微分方程式

$$A\phi_{-} = (\partial^2 + v\partial + w)\phi_{-} = 0, \quad (3.30)$$

$$A^{\dagger}\phi_{+} = (\partial^2 - \partial v + w)\phi_{+} = 0 \quad (3.31)$$

を解けばよいのだが、一般解を陽に書くことはできず形式解を見いだすにとどまる。まずは1次微分項を消去しよう（その結果は (3.42)）。2次絡合子は

$$A = \partial^2 + \left\{ \frac{v}{2}, \partial \right\} + w - \frac{v'}{2}, \quad (3.32)$$

$$A^{\dagger} = \partial^2 - \left\{ \frac{v}{2}, \partial \right\} + w - \frac{v'}{2} \quad (3.33)$$

と書き直される。ただし  $\{a, b\}$  は反交換子で  $\{a, b\} \equiv ab + ba$ 。計算の便宜のため

$$f(x) \equiv \frac{v}{2}, \quad (3.34)$$

$$\varphi(x) \equiv w - \frac{v'}{2} \quad (3.35)$$

を導入すれば、2次絡合子は

$$A = \partial^2 + \{f, \partial\} + \varphi = (\partial + f)^2 + \varphi - f^2, \quad (3.36)$$

$$A^{\dagger} = \partial^2 - \{f, \partial\} + \varphi = (\partial - f)^2 + \varphi - f^2, \quad (3.37)$$

と表される。よって解くべき方程式 (3.30), (3.31) は

$$(\partial \pm f)^2 \phi_{\mp} = (f^2 - \varphi) \phi_{\mp} \quad (3.38)$$

となる ( $\phi_+$  の式は  $\phi_-$  の式で  $f \rightarrow -f$  とすればよいから, 以下  $\phi_-$  について述べる).

$$\partial + f = \exp\left(-\int_a dx f\right) \partial \exp\left(\int_a dx f\right) \quad (3.39)$$

を用いれば

$$\exp\left(-\int_a dx f\right) \partial^2 \exp\left(\int_a dx f\right) \phi_- = (f^2 - \varphi) \phi_- \quad (3.40)$$

となり, 両辺に  $\exp(\int_a dx f)$  を乗ずれば

$$\partial^2 \exp\left(\int_a dx f\right) \phi_- = (f^2 - \varphi) \exp\left(\int_a dx f\right) \phi_-, \quad (3.41)$$

あるいは左辺を移項して

$$(-\partial^2 + f^2 - \varphi) \exp\left(\int_a dx f\right) \phi_- = 0 \quad (3.42)$$

を得る. これは函数  $\exp(\int_a dx f) \phi_-$  に対するシュレーディンガー型方程式である. ポテンシャルとスーパーポテンシャルの関係 (1.18), (1.19) 及び絡合子の積とハミルトニアンの関係 (1.24), (1.25) を思い出せば, Riccati 方程式

$$f^2 - \varphi = \omega^2 - \omega' \quad (3.43)$$

を満たす  $\omega(x)$  を用いて,

$$(-\partial + \omega)(\partial + \omega) \exp\left(\int_a dx f\right) \phi_- = 0 \quad (3.44)$$

と書き直せる. ここで再び (3.39) を用いれば

$$\exp\left(\int_a dx \omega\right) \partial \exp\left(-2 \int_a dx \omega\right) \partial \exp\left(\int_a dx (\omega + f)\right) \phi_- = 0. \quad (3.45)$$

$\exp(-\int_a dx \omega)$  を乗じて 1 回積分すれば

$$\exp\left(-2 \int_a dx \omega\right) \partial \exp\left(\int_a dx (\omega + f)\right) \phi_- = B. \quad (3.46)$$

$B$  は積分定数.  $\exp(2 \int_a dx \omega)$  を乗じてさらに積分すれば

$$\exp\left(\int_a dx (\omega + f)\right) \phi_- = B \int_a dx \exp\left(2 \int_a dx \omega\right) + A. \quad (3.47)$$

$A$  は積分定数. したがって

$$\phi_- = B \exp\left(-\int_a dx (\omega + f)\right) \int_a dx \exp\left(2 \int_a dx \omega\right) + A \exp\left(-\int_a dx (\omega + f)\right) \quad (3.48)$$

が得られる.  $f \rightarrow -f$  を行えば  $\phi_+$  は

$$\phi_+ = D \exp\left(-\int_a dx (\omega - f)\right) \int_a dx \exp\left(2 \int_a dx \omega\right) + C \exp\left(-\int_a dx (\omega - f)\right) \quad (3.49)$$

$C, D$  は積分定数. もちろん  $\omega$  を知るには (3.43) を解かねばならないから, これらはあくまで形式解である. (1.38) で見たように通常の 1 次絡合子を使う超対称系の場合には,  $A, A^\dagger$  のゼロモード  $\phi_\mp$  は同時には規格化できず, さらに一方が規格化可能なとき, 他方には規格化可能な同じエネルギーの固有状態は存在しないことが示された ((1.43) 以下の説明を参照). しかし 2 次絡合子を用いる 2 重超対称系においては, (3.48), (3.49) を見る限りそのような制限は見いだせないから, モデルごとに個別にゼロモードの規格化可能性を検討しなければ, 準位消失についての判断は下せない. 実際, 2 重超対称系では  $A, A^\dagger$  両方のゼロモードが同時に規格化可能であることが起こりうる. ゼロモードの同時規格化可能性については, 後で再び論じる.



## 3.1.4. 可約 2 重超対称系

2 つの超対称系  $H_1, \tilde{H}_1$  と  $H_2, \tilde{H}_2$  を考える.

$$A_1 H_1 = \tilde{H}_1 A_1 \begin{cases} H_1 = -\partial^2 + V_1, \\ \tilde{H}_1 = -\partial^2 + \tilde{V}_1, \\ A_1 = \partial + w_1, \\ V_1 = w_1^2 - w_1' + \epsilon_1, \\ \tilde{V}_1 = w_1^2 + w_1' + \epsilon_1 \end{cases}, \quad A_2 H_2 = \tilde{H}_2 A_2 \begin{cases} H_2 = -\partial^2 + V_2, \\ \tilde{H}_2 = -\partial^2 + \tilde{V}_2, \\ A_2 = \partial + w_2, \\ V_2 = w_2^2 - w_2' + \epsilon_2, \\ \tilde{V}_2 = w_2^2 + w_2' + \epsilon_2. \end{cases} \quad (3.50)$$

この 2 つの超対称系を結合してみる. すなわち

$$H_1 = \tilde{H}_2 \quad (3.51)$$

の条件を課してみる. すると

$$A_1 A_2 H_2 = \tilde{H}_1 A_1 A_2 \quad (3.52)$$

が成り立つが, これは  $H_2$  と  $\tilde{H}_1$  とが 2 次絡合子  $A_1 A_2$  で絡合する 2 重超対称系であることを示している. いわば「超対称の超対称は 2 重超対称」ということである. そこで

$$H = H_2, \quad (3.53)$$

$$\tilde{H} = \tilde{H}_1, \quad (3.54)$$

$$A = A_1 A_2 \quad (3.55)$$

と同定すれば,

$$A = (\partial + w_1)(\partial + w_2) \quad (3.56)$$

$$= \partial^2 + (w_1 + w_2)\partial + w_1 w_2 + w_2' \quad (3.57)$$

であるから, (3.4) (及び  $u = 1$ ) と比較してこれは

$$v = w_1 + w_2, \quad (3.58)$$

$$w = w_1 w_2 + w_2' \quad (3.59)$$

の場合に相当する. あるいは (3.34), (3.35) を用いて

$$f = \frac{w_1 + w_2}{2}, \quad (3.60)$$

$$\varphi = w_1 w_2 + \left( \frac{w_2 - w_1}{2} \right)' \quad (3.61)$$

の場合であると言ってもよい.

絡合子のゼロモード  $\phi_{\mp}$  (3.48) を見いだすにあたって,  $\omega$  を知らねばならないが, これは  $\omega$  に関する Riccati 方程式 (3.43) より

$$\omega^2 - \omega' = \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right)^2 - w_1 w_2 - \left( \frac{w_2 - w_1}{2} \right)' \quad (3.62)$$

$$= \left( \frac{w_2 - w_1}{2} \right)^2 - \left( \frac{w_2 - w_1}{2} \right)' \quad (3.63)$$

となることから, 特解

$$\omega_p = \frac{w_2 - w_1}{2} \quad (3.64)$$

が見いだされる。一般解は (1.70) で見たように

$$\omega = \frac{w_2 - w_1}{2} - \frac{\exp\left(\int_a dx (w_2 - w_1)\right)}{\mu + \int_a dx \exp\left(\int_a dx (w_2 - w_1)\right)} \quad (3.65)$$

と与えられる（ $\mu$  は積分定数）。

一方, (3.51) の条件は

$$w_1^2 - w_1' + \epsilon_1 = w_2^2 + w_2' + \epsilon_2 \quad (3.66)$$

となるが, これを変形すれば

$$w_2^2 - w_1^2 = -(w_1 + w_2)' + \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad (3.67)$$

あるいは (3.60) を用いて

$$\omega_p = \frac{w_2 - w_1}{2} = -\frac{f'}{2f} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{4f} \quad (3.68)$$

が得られる。ゆえに

$$\omega^2 - \omega' = \omega_p^2 - \omega_p' \quad (3.69)$$

$$= \left( \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)f'}{4f^2} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{16f^2} \right) - \left( -\frac{f''}{2f} + \frac{f'^2}{2f^2} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)f'}{4f^2} \right) \quad (3.70)$$

$$= -\frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{2f} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{16f^2}. \quad (3.71)$$

しかるに (3.43) より

$$\varphi = f^2 - (\omega^2 - \omega') \quad (3.72)$$

$$= f^2 + \frac{f'^2}{4f^2} - \frac{f''}{2f} - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{16f^2}. \quad (3.73)$$

また

$$V + \tilde{V} = V_2 + \tilde{V}_1 \quad (3.74)$$

$$= w_1^2 + w_2^2 + (w_1 - w_2)' + \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (3.75)$$

$$= (w_1 + w_2)^2 - 2 \left( w_1 w_2 + \frac{(w_2 - w_1)'}{2} \right) + \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (3.76)$$

$$= 4f^2 - 2\varphi + \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (3.77)$$

$$= 2f^2 - \frac{f'^2}{2f^2} + \frac{f''}{f} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{8f^2} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (3.78)$$

及び

$$V - \tilde{V} = V_2 - \tilde{V}_1 \quad (3.79)$$

$$= w_2^2 - w_1^2 - (w_1 + w_2)' + \epsilon_2 - \epsilon_1 \quad (3.80)$$

$$= -2(w_1 + w_2)' \quad (3.81)$$

$$= -4f' \quad (3.82)$$

より,

$$V = f^2 - \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{2f} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{16f^2} - 2f' + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \quad (3.83)$$

$$\tilde{V} = f^2 - \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{2f} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{16f^2} + 2f' + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}. \quad (3.84)$$

(3.34),(3.35) を用いて  $f$  の代わりに  $v$  で表せば,

$$w = \frac{v^2}{4} + \frac{v'^2}{4v^2} - \frac{v''}{2v} - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{4v^2} + \frac{v'}{2}, \quad (3.85)$$

$$V = \frac{v^2}{4} - \frac{v'^2}{4v^2} + \frac{v''}{2v} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{4v^2} - v' + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \quad (3.86)$$

$$\tilde{V} = \frac{v^2}{4} - \frac{v'^2}{4v^2} + \frac{v''}{2v} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{4v^2} + v' + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \quad (3.87)$$

となるが, これらは (3.15),(3.13),(3.14) において

$$c = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \quad (3.88)$$

$$d = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2}{4} \quad (3.89)$$

としたものに他ならない. とりわけ重要なのは, ここでは  $d \geq 0$  となっていることである. すなわち 2 重超対称系 (3.13),(3.14) において,  $d \geq 0$  であればそれは 2 組の超対称系に分解できるが,  $d < 0$  であればそれは不可能ということになる. この意味で  $d < 0$  の場合を既約な 2 重超対称系,  $d \geq 0$  の場合を可約な 2 重超対称系と呼ぶ. 先述したように, 既約な 2 重超対称系においては準位の消失は起こりえず, 完全に同一のスペクトルを持つ.

原理的には, 2 組の超対称系を結合すれば (可約な) 2 重超対称系が構成できるわけであるが, 実際に結合条件 (3.66)

$$w_1^2 - w_1' + \epsilon_1 = w_2^2 + w_2' + \epsilon_2$$

を満たす  $w_1, w_2$  をいかに見いだすかを検討する. さしあたり超対称系  $V_1, \tilde{V}_1$  を与える  $w_1$  が既知とし,  $w_2$  を求めることとして問題を設定する. これは  $w_2$  についての Riccati 方程式であるが,

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \quad (3.90)$$

の場合には, 特解として

$$w_2 = -w_1 \quad (3.91)$$

がただちに見いだされる. しかしこれは (3.58) より  $v = 0$  であり, 先述したように  $\tilde{V} = V$ , しかも  $A = c - H$  という意味のない結果に導く. だが一般解を用いるならば話は別である. 一般解は (1.70) より ( $-w_2$  を  $w$  と見て)

$$w_2 = -w_1 + \frac{\exp(2 \int dx w_1)}{\mu + \int dx \exp(2 \int dx w_1)}. \quad (3.92)$$

したがって (3.58) より

$$v = \frac{\exp(2 \int dx w_1)}{\mu + \int dx \exp(2 \int dx w_1)}. \quad (3.93)$$

これを (3.86),(3.87) に代入して 2 重超対称系  $V, \tilde{V}$  を得る.

### 3.1.5. 可約 2 重超対称系における 2 次絡合子の積

(3.88),(3.89) を (3.18),(3.19) に代入すれば,

$$A^\dagger A = (H - \epsilon_1)(H - \epsilon_2), \quad (3.94)$$

$$A A^\dagger = (\tilde{H} - \epsilon_1)(\tilde{H} - \epsilon_2) \quad (3.95)$$

となる。(3-18),(3-19)の関係を導くにはやや面倒な計算を要したが、2組の超対称系を結合する場合にはもっと簡単にこの関係を導くことができる。それには通常の超対称系における1次絡合子の積とハミルトニアンとの関係、

$$A_1^\dagger A_1 = H_1 - \epsilon_1, \quad (3-96)$$

$$A_1 A_1^\dagger = \tilde{H}_1 - \epsilon_1 \quad (3-97)$$

等の関係を用いればよい。(3-55)のエルミート共役は

$$A^\dagger A = A_2^\dagger A_1^\dagger \quad (3-98)$$

だから

$$A^\dagger A = A_2^\dagger A_1^\dagger A_1 A_2 \quad (3-99)$$

$$= A_2^\dagger (H_1 - \epsilon_1) A_2 \quad (3-100)$$

$$= A_2^\dagger (\tilde{H}_2 - \epsilon_1) A_2 \quad (\because \text{結合条件 } H_1 = \tilde{H}_2) \quad (3-101)$$

$$= (H_2 - \epsilon_1) A_2^\dagger A_2 \quad (\because \text{絡合式 } H_2 A_2^\dagger = A_2^\dagger \tilde{H}_2) \quad (3-102)$$

$$= (H_2 - \epsilon_1)(H_2 - \epsilon_2) \quad (3-103)$$

$$= (H - \epsilon_1)(H - \epsilon_2). \quad (3-104)$$

$AA^\dagger$ についても同様である。

### 3.1.6. 可約2重超対称系における準位消失

2組の超対称系を結合して2重超対称系を構成する場合、準位の消失を調べるのに(3-48),(3-49)を用いて2次絡合子のゼロモードを求め、その規格化可能性を検討する必要はない。2重超対称系の構成因子である各超対称系の準位消失から、全体としての準位消失は明らかだからである。もう一度各ハミルトニアンとの関係を書いておく。

$$H = H_2, \quad (3-105)$$

$$\tilde{H}_2 = H_1 \quad (\text{結合条件}), \quad (3-106)$$

$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}. \quad (3-107)$$

超対称系  $H_1, \tilde{H}_1$  における準位の消失は  $A_1, A_1^\dagger$  のゼロモード

$$\phi_{1\mp} \equiv \exp\left(\mp \int dx w_1\right) \quad (3-108)$$

の規格化可能性で決まり、

1.  $\phi_{1-}$  が規格化可能な場合、 $\tilde{H}_1$  の基底準位が消失。
2.  $\phi_{1+}$  が規格化可能な場合、 $H_1$  の基底準位が消失。
3.  $\phi_{1\mp}$  がともに規格化不能な場合、消失はない。

の3通りであった。 $H_2, \tilde{H}_2$  における準位の消失も同様に3通りあり、したがって  $H$  と  $\tilde{H}$  における準位消失の場合の数は9通りであるが、スペクトルの違いのみに注目すれば、それは次の5通りになる。

- (i)  $\tilde{H}$  の基底状態と第1励起状態が消失。これは  $\phi_{2-}, \phi_{1-}$  が規格化可能な場合である。
- (ii)  $H$  の基底状態と第1励起状態が消失。これは  $\phi_{2+}, \phi_{1+}$  が規格化可能な場合である。
- (iii)  $\tilde{H}$  の基底状態が消失。これは  $\phi_{2-}$  または  $\phi_{1-}$  の一つだけが規格化可能で、他は規格化不能な場合である。
- (iv)  $H$  の基底状態が消失。これは  $\phi_{2+}$  または  $\phi_{1+}$  の一つだけが規格化可能で、他は規格化不能な場合である。

- (v) 準位の消失はない。これは  $\phi_{2\mp}, \phi_{1\mp}$  がすべて規格化不能な場合、あるいは  $\phi_{2-}, \phi_{1+}$  が規格化可能な場合、もしくは  $\phi_{2+}, \phi_{1-}$  が規格化可能な場合である。

多重超対称系についてこれ以上詳しいことは文献<sup>62)-71)</sup>を見られたい。

#### §4. 3次元拡張

現在までのところ、超対称量子力学（およびその多重拡張理論）の研究の大部分は1次元系、あるいは球対称3次元系の動径成分に限られている。1次の絡合子を用いた超対称量子力学の2次元拡張は文献<sup>2)-4), 72)</sup>に与えられている。そこでは  $2 \times 2$  行列ハミルトニアンと1組のハミルトニアンとの間の等スペクトル性が構築されている。行列のハミルトニアンを含まない2次元拡張は2次の絡合子を用いることで行われている<sup>73)-78)</sup>。この節では、超対称量子力学の3次元拡張を検討する<sup>\*)</sup>。用いる絡合子としては、運動量について1次のものと2次のものを考える。1次絡合子による2次元拡張理論は、我々の3次元の結果で関係する量の  $z$  成分を0とおけば得られる。

##### 4.1. 1次絡合子による3次元拡張

ここでは運動量について1次の絡合子を用いる。考えるハミルトニアンは非相対論的な標準形、

$$H = -\Delta + V(\mathbf{r}), \quad (4.1)$$

$$\tilde{H} = -\Delta + \tilde{V}(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

もちろん  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  である。3次元における1次絡合子は

$$A = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla + w(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

ただし  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v_x(\mathbf{r}), v_y(\mathbf{r}), v_z(\mathbf{r}))$ 。これらを絡合関係式

$$AH = \tilde{H}A, \quad (4.4)$$

に代入すると、 $\mathbf{v}, w, V, \tilde{V}$  に対する次の方程式を得る。

$$\partial_i v_j + \partial_j v_i = 0, \quad (4.5)$$

$$\Delta \mathbf{v} + 2\nabla w = (\tilde{V} - V)\mathbf{v}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla V + \Delta w = (\tilde{V} - V)w. \quad (4.7)$$

(4.5) の一般解は

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b}, \quad (4.8)$$

ただし  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は任意の定数ベクトルである。これにより絡合子は

$$A = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) + \mathbf{b} \cdot \nabla + w \quad (4.9)$$

の形をとる。(4.8) を (4.6), (4.7) に代入すれば、

$$2\nabla w = (\tilde{V} - V)(\mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b}), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla V) + \mathbf{b} \cdot \nabla V + \Delta w = (\tilde{V} - V)w. \quad (4.11)$$

を得る。次のような場合分けを行うのが便利である。(i)  $\mathbf{a} \neq 0$ , (ii)  $\mathbf{a} = 0$ 。

<sup>\*)</sup> 本節の内容は筆者の論文<sup>29)</sup>に基づく。

(i)  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  の場合, 一般性を失うことなく  $\mathbf{a}$  を単位ベクトルとすることができる.  $A$  には定数倍だけの不定性があるからである. 座標の回転によりこの単位ベクトルを  $z$  軸方向に選び  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$  とすれば

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{e}_z \times \mathbf{b}) + b_z \mathbf{e}_z. \quad (4.12)$$

さらに原点の平行移動  $\mathbf{r} - \mathbf{e}_z \times \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{r}$  を行くと

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} + b_z \mathbf{e}_z \quad (4.13)$$

となる. これは結局  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z$  及び  $\mathbf{b} = b_z \mathbf{e}_z$  としたのに等しい. これにより絡合子は

$$A = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) + b_z \partial_z + w(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

となる. また方程式 (4.10), (4.11) は

$$2\nabla w = (\tilde{V} - V)(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} + b_z \mathbf{e}_z), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r} \times \nabla V) + b_z \partial_z V + \Delta w = (\tilde{V} - V)w, \quad (4.16)$$

となる. 円筒座標  $(\rho, \varphi, z)$  を用いればこれらは

$$2\partial_\rho w = 0, \quad (4.17)$$

$$2\partial_\varphi w = (\tilde{V} - V)\rho^2, \quad (4.18)$$

$$2\partial_z w = (\tilde{V} - V)b_z, \quad (4.19)$$

$$(\partial_\varphi + b_z \partial_z)V + \left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2 \right) w = (\tilde{V} - V)w \quad (4.20)$$

と表される.

$b_z \neq 0$  の場合, (4.18) 及び (4.19) を  $\rho$  について微分することで,  $V$  と  $\tilde{V}$  は等しく, それは  $z$  軸上で特異なポテンシャル

$$\tilde{V} = V = V(\rho, \xi), \quad \xi \equiv b_z \varphi - z \quad (4.21)$$

になることがわかる. 値の一意性を保証するためには,  $V(\rho, \xi)$  は  $\xi$  の周期を  $2\pi b_z$  とする周期関数でなければならない.  $\tilde{H} = H$  であるため, 絡合子は系の対称演算子となる:

$$[H, A] = 0, \quad A = \partial_\varphi + b_z \partial_z. \quad (4.22)$$

これは  $[A, \xi] = 0$  より明らかである.

$b_z = 0$  の場合, (4.19) は  $\partial_z w = 0$  となり, (4.17) と合わせれば

$$w = w(\varphi) \quad (4.23)$$

を得る. (4.18) は

$$\tilde{V} - V = \frac{2w'(\varphi)}{\rho^2} \quad (4.24)$$

と書き直せる. (4.23), (4.24) を (4.20) に代入することで

$$\partial_\varphi V + \frac{w''(\varphi)}{\rho^2} = \frac{2ww'(\varphi)}{\rho^2} \quad (4.25)$$

を得る。したがって

$$V = \frac{w^2(\varphi) - w'(\varphi)}{\rho^2} + V_{\rho z}(\rho, z), \quad (4.26)$$

$$\tilde{V} = \frac{w^2(\varphi) + w'(\varphi)}{\rho^2} + V_{\rho z}(\rho, z), \quad (4.27)$$

を得る。ただし  $V_{\rho z}$  は  $\rho$  と  $z$  の任意函数であり、絡合子は

$$A = \partial_\varphi + w(\varphi) \quad (4.28)$$

となる。一意性を保証するためには、 $w(\varphi)$  は周期  $2\pi$  の周期函数でなければならない。これらのポテンシャルは  $z$  軸上で特異であり、実際にモデルとして用いる場合には、何らかの方法で特異性を回避しなければならない。その方法の一つは  $w(\varphi)$  を定数とすることであるが、これは  $V = \tilde{V} = V(\rho, z)$  及び  $A = \partial_\varphi + \text{const}$  の自明な場合に帰着する。あるいは  $z$  軸上に有限半径  $\rho_0$  の円柱状物質があるとして、系の定義域を  $\rho \geq \rho_0$  と制限し、 $\rho = \rho_0$  における適当な境界条件を波動函数に課すことも考えられる。いずれにせよ (4.26), (4.27), (4.28) は 1 次元の場合の自明な拡張になっている。これは次のような理由による。まず (4.28) における  $A$  について

$$AH_{\rho z} = H_{\rho z}A, \quad (4.29)$$

の関係が成立する。ただし  $H_{\rho z} = -\rho^{-1}\partial_\rho\rho\partial_\rho - \partial_z^2 + V_{\rho z}(\rho, z)$  である。次に

$$AH_\varphi = \tilde{H}_\varphi A, \quad (4.30)$$

が成立する。ただし  $H_\varphi = -\partial_\varphi^2 + w^2(\varphi) - w'(\varphi)$  及び  $\tilde{H}_\varphi = -\partial_\varphi^2 + w^2(\varphi) + w'(\varphi)$  である。(4.30) を  $\rho^2$  で除したものを (4.29) に加えれば

$$A\left(\frac{H_\varphi}{\rho^2} + H_{\rho z}\right) = \left(\frac{\tilde{H}_\varphi}{\rho^2} + H_{\rho z}\right)A \quad (4.31)$$

を得る。 $H_\varphi/\rho^2 + H_{\rho z}$ ,  $\tilde{H}_\varphi/\rho^2 + H_{\rho z}$  におけるポテンシャルは (4.26), (4.27) 式における形になっている。

(ii)  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  の場合、一般性を失うことなく  $\mathbf{b}$  を単位ベクトルとすることができる。座標の回転により単位ベクトルを  $x$  軸の方向にとり  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x$  とすれば、絡合子は

$$A = \partial_x + w(\mathbf{r}), \quad (4.32)$$

また (4.10), (4.11) は

$$2\nabla w = (\tilde{V} - V)\mathbf{e}_x, \quad (4.33)$$

$$\partial_x V + \Delta w = (\tilde{V} - V)w \quad (4.34)$$

となる。(4.33) の  $y, z$  成分は  $\partial_y w = \partial_z w = 0$  となるから、

$$w = w(x). \quad (4.35)$$

よって (4.33) の  $x$  成分より

$$\tilde{V} - V = 2w'(x) \quad (4.36)$$

を得る。(4.35), (4.36) を (4.34) に代入すると

$$\partial_x V + w''(x) = 2w(x)w'(x). \quad (4.37)$$

よって

$$V = w^2(x) - w'(x) + V_{yz}(y, z), \quad (4.38)$$

$$\tilde{V} = w^2(x) + w'(x) + V_{yz}(y, z), \quad (4.39)$$

ここに  $V_{yz}(y, z)$  は任意関数であり, また絡合子は

$$A = \partial_x + w(x). \quad (4.40)$$

これは 1 次元の場合の自明な拡張である. その理由は以下の通り. まず (4.40) における  $A$  について

$$AH_{yz} = H_{yz}A, \quad (4.41)$$

ただし  $H_{yz} = -\partial_y^2 - \partial_z^2 + V_{yz}(y, z)$  が成立する. また

$$AH_x = \tilde{H}_x A, \quad (4.42)$$

ただし  $H_x = -\partial_x^2 + w^2(x) - w'(x)$  and  $\tilde{H}_x = -\partial_x^2 + w^2(x) + w'(x)$  が成立する. (4.41), (4.42) を足し合わせれば

$$A(H_x + H_{yz}) = (\tilde{H}_x + H_{yz})A \quad (4.43)$$

を得るからである.

(i), (ii) の結果をまとめると, 1 次絡合子による 3 次元拡張は, 結局 1 次元の場合の自明な拡張に帰着してしまうことがわかった.

#### 4.2. 2 次絡合子による 3 次元拡張

ここでは運動量について 2 次の絡合子を用いた 3 次元拡張を検討する. ハミルトニアンは先と同じく (4.1), (4.2) を用い, 絡合子として

$$A = g_{ij}(\mathbf{r})\partial_i\partial_j + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla + w(\mathbf{r}) \quad (4.44)$$

の形を考える. これらを (4.4) に代入すれば,  $g_{ij}, \mathbf{v}, w, V, \tilde{V}$  に関する方程式

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} = 0, \quad (4.45)$$

$$\Delta g_{ij} + \partial_i v_j + \partial_j v_i = (\tilde{V} - V)g_{ij}, \quad (4.46)$$

$$2g_{ij}\partial_j V + \Delta v_i + 2\partial_i w = (\tilde{V} - V)v_i, \quad (4.47)$$

$$g_{ij}\partial_i\partial_j V + \mathbf{v} \cdot \nabla V + \Delta w = (\tilde{V} - V)w \quad (4.48)$$

を得る. (4.45) の一般解は

$$g_{11} = a_{33}x_2^2 + a_{22}x_3^2 - 2a_{23}x_2x_3 - b_{31}x_2 + b_{21}x_3 + c_{11}, \quad (4.49)$$

$$g_{22} = a_{11}x_3^2 + a_{33}x_1^2 - 2a_{31}x_3x_1 - b_{12}x_3 + b_{32}x_1 + c_{22}, \quad (4.50)$$

$$g_{33} = a_{22}x_1^2 + a_{11}x_2^2 - 2a_{12}x_1x_2 - b_{23}x_1 + b_{13}x_2 + c_{33}, \quad (4.51)$$

$$g_{12} = -a_{33}x_1x_2 + a_{23}x_3x_1 + a_{31}x_2x_3 - a_{12}x_3^2 \\ + \frac{b_{31}}{2}x_1 - \frac{b_{32}}{2}x_2 - \frac{b_{11} - b_{22}}{2}x_3 + c_{12}, \quad (4.52)$$

$$g_{23} = -a_{11}x_2x_3 + a_{31}x_1x_2 + a_{12}x_3x_1 - a_{23}x_1^2 \\ + \frac{b_{12}}{2}x_2 - \frac{b_{13}}{2}x_3 - \frac{b_{22}}{2}x_1 + c_{23}, \quad (4.53)$$

$$g_{31} = -a_{22}x_3x_1 + a_{12}x_2x_3 + a_{23}x_1x_2 - a_{31}x_2^2 \\ + \frac{b_{23}}{2}x_3 - \frac{b_{21}}{2}x_1 + \frac{b_{11}}{2}x_2 + c_{31} \quad (4.54)$$



となる。ただし  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  は計 20 個の任意定数である。これらを用いて (4.44) の絡合子は

$$A = a_{ij}l_i l_j + b_{ij}l_i \partial_j + c_{ij}\partial_i \partial_j + (d_{ij}x_i + v_j)\partial_j + w \quad (4.55)$$

と書き直せる。ただし (i)  $l_i \equiv \epsilon_{ijk}x_j \partial_k$ , (ii)  $a_{ji} = a_{ij}$  として  $a_{21}, a_{13}, a_{32}$ , (iii)  $\sum_{i=1}^3 b_{ii} = 0$  として  $b_{33}$ , (iv)  $c_{ji} = c_{ij}$  として  $c_{21}, c_{13}, c_{32}$ , (v)  $d_{ij} \equiv (\sum_{k=1}^3 a_{kk})\delta_{ij} - a_{ij}$  を導入した。

方程式 (4.46), (4.47), (4.48) の特解を求めよう。このために  $a_{ij} = b_{ij} = 0$ ,  $c_{ij} = \text{diag}(1, -1, 0)$  の場合を考える。このとき絡合子は

$$A = \partial_1^2 - \partial_2^2 + v_i \partial_i + w \quad (4.56)$$

の形をとる。また方程式 (4.46), (4.47), (4.48) は

$$\partial_i v_j + \partial_j v_i = (\tilde{V} - V)c_{ij}, \quad (4.57)$$

$$c_{ij}\partial_j(\tilde{V} + V) + 2\partial_i w = (\tilde{V} - V)v_i, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla(\tilde{V} + V) = 2(\tilde{V} - V)w \quad (4.59)$$

となる。  $x_{\pm} \equiv (x_1 \pm x_2)/\sqrt{2}$  として、方程式 (4.57) の一般解は

$$v_1 = x_3 y_1 + \frac{\beta_+(x_+) + \beta_-(x_-)}{\sqrt{2}}, \quad (4.60)$$

$$v_2 = -x_3 y_2 - \frac{\beta_+(x_+) - \beta_-(x_-)}{\sqrt{2}}, \quad (4.61)$$

$$v_3 = a - (cx_+x_- + d_+x_- + d_-x_+) \quad (4.62)$$

$$= a - \left(\frac{c}{2}x_1^2 + d_1x_1\right) + \left(\frac{c}{2}x_2^2 + d_2x_2\right), \quad (4.63)$$

$$\tilde{V} - V = 2cx_3 + \beta'_+(x_+) + \beta'_-(x_-), \quad (4.64)$$

となる。ただし  $a, c, d_{\pm} \equiv (d_1 \pm d_2)/\sqrt{2}$  は任意定数,  $\beta_{\pm}(x_{\pm})$  は任意函数, また

$$y_{1,2} = \frac{cx_{1,2} + d_{1,2}}{\sqrt{2}} \quad (4.65)$$

である。  $y_{\pm} \equiv (y_1 \pm y_2)/\sqrt{2}$  とすれば (4.58) の一般解は

$$\begin{aligned} \tilde{V} + V &= 2V_3(x_3) + \frac{3}{2}x_3^2(y_+^2 + y_-^2) + x_3(y_+\beta_+ + y_-\beta_- + \alpha_2(x_2) - \alpha_1(x_1)) \\ &\quad + \frac{\beta_+^2 + \beta_-^2}{2} + \gamma_2(x_2) - \gamma_1(x_1), \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$2w = cv_3x_3^2 + v_3(\beta'_+ + \beta'_-)x_3 + \beta_+\beta_- + \gamma_1(x_1) + \gamma_2(x_2) \quad (4.67)$$

と書ける。ただし  $\alpha_1(x_1)$ ,  $\alpha_2(x_2)$  は

$$\alpha_1(x_1) + \alpha_2(x_2) = v_3(\beta'_+ + \beta'_-) - y_+\beta_- - y_-\beta_+ \quad (4.68)$$

を満たさねばならない。ここまです絡合子は

$$\begin{aligned} A &= 2 \left( \partial_+ + \frac{x_3 y_+ + \beta_+}{2} \right) \left( \partial_- + \frac{x_3 y_- + \beta_-}{2} \right) + v_3 \partial_3 + \frac{2cv_3 - ca - d_+d_-}{2} x_3^2 \\ &\quad + \frac{v_3(\beta'_+ + \beta'_-) - y_+\beta_- - y_-\beta_+}{2} x_3 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \end{aligned} \quad (4.69)$$

の形になる.  $v_3 = 0$  (したがって  $a = c = d_{\pm} = y_{\pm} = 0$ ) の場合には, 2次元の場合の自明な拡張に帰着するが, これは既に調べられているから<sup>73)</sup>,  $v_3 \neq 0$  の場合を考える. この場合には (4.59) は4つの方程式

$$2c\{4cv_3 - 3(ca + d_+d_-)\} = 2m_4v_3, \quad (4.70)$$

$$(4c + y_+\partial_+ + y_-\partial_-)\alpha - (ca + d_+d_-)(\beta'_+ + \beta'_-) = 2m_3v_3, \quad (4.71)$$

$$\partial_+(\beta_+\alpha + y_+\gamma) + \partial_-(\beta_-\alpha + y_-\gamma) = v_3\{2m_2 + 3(y_+^2 + y_-^2)\}, \quad (4.72)$$

$$\partial_+(\beta_+\gamma) + \partial_-(\beta_-\gamma) = v_3(2m_1 + y_+\beta_+ + y_-\beta_- + \alpha_2 - \alpha_1) \quad (4.73)$$

( $\alpha \equiv \alpha_1(x_1) + \alpha_2(x_2)$ ,  $\gamma \equiv \gamma_1(x_1) + \gamma_2(x_2)$ ) 及び

$$V_3 = \frac{m_4}{4}x_3^4 + \frac{m_3}{3}x_3^3 + \frac{m_2}{2}x_3^2 + m_1x_3 \quad (4.74)$$

に帰着する. ただし  $m_1$  から  $m_4$  は定数である.  $c \neq 0$  の場合には, これらの一般解が見いだされ, それは

$$\beta_{\pm} = h_{\pm}y_{\pm} + \frac{q_{\pm}}{y_{\pm}}, \quad (4.75)$$

$$\alpha_1 = -(\sqrt{2}h_1y_1^2 + \alpha_0), \quad (4.76)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{2}h_1y_2^2 + \alpha_0, \quad (4.77)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4c^2} \left\{ y_1^4 + (m_2 - 4c^2h_1^2)y_1^2 + \gamma_0 + \frac{s_1}{y_1^2} \right\}, \quad (4.78)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4c^2} \left\{ y_2^4 + (m_2 - 4c^2h_1^2)y_2^2 + \gamma_0 + \frac{s_2}{y_2^2} \right\} \quad (4.79)$$

となる. ただし  $s, h_{\pm} \equiv (h_1 \pm h_2)/\sqrt{2}$  及び  $q_{\pm} \equiv (q_1 \pm q_2)/\sqrt{2}$  は任意定数であり,

$$m_4 = 4c^2, \quad m_3 = 6\sqrt{2}c^2h_1, \quad m_1 = \frac{h_1(m_2 - 4c^2h_1^2)}{\sqrt{2}} - \alpha_0, \quad (4.80)$$

及び条件式

$$s_{\pm}h_2 = s_{\pm}q_2 = s_-q_1 = 0 \quad (4.81)$$

が付帯する. 結果を簡明にするため,  $x_3$  についての4次式を標準形になおし, 共通の定数を落とせば

$$\begin{aligned} V = & c^2x_3^4 + \left\{ \frac{3}{4}(y_+^2 + y_-^2) + \frac{m_2}{2} - 3c^2h_1^2 \right\} x_3^2 + \left\{ \frac{h_2}{2\sqrt{2}}(y_+^2 - y_-^2) + \frac{q_1}{\sqrt{2}} - c \right\} x_3 \\ & + \frac{1}{8c^2}(y_1^4 + y_2^4) + \left( \frac{m_2}{8c^2} - \frac{3}{4}h_1^2 + \frac{1}{8}h_2^2 \right) (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{8c^2} \left( \frac{s_1}{y_1^2} + \frac{s_2}{y_2^2} \right) \\ & + \frac{q_+(q_+ + 2c)}{4} \frac{1}{y_+^2} + \frac{q_-(q_- + 2c)}{4} \frac{1}{y_-^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}ch_1, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V} = & c^2x_3^4 + \left\{ \frac{3}{4}(y_+^2 + y_-^2) + \frac{m_2}{2} - 3c^2h_1^2 \right\} x_3^2 + \left\{ \frac{h_2}{2\sqrt{2}}(y_+^2 - y_-^2) + \frac{q_1}{\sqrt{2}} + c \right\} x_3 \\ & + \frac{1}{8c^2}(y_1^4 + y_2^4) + \left( \frac{m_2}{8c^2} - \frac{3}{4}h_1^2 + \frac{1}{8}h_2^2 \right) (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{8c^2} \left( \frac{s_1}{y_1^2} + \frac{s_2}{y_2^2} \right) \\ & + \frac{q_+(q_+ - 2c)}{4} \frac{1}{y_+^2} + \frac{q_-(q_- - 2c)}{4} \frac{1}{y_-^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}ch_1 \end{aligned} \quad (4.83)$$

となる。上で述べたとおり、 $c, m, h, q, s$  は定数であり、(4.81) の条件を満たさねばならない。また  $y \equiv cx + d$  であった。これらのポテンシャルは  $y_{\pm} = 0$  で特異であるため、モデルとして用いるに当たっては、系の定義域を  $y_{\pm} > 0$  に限るなどして特異性を避ける必要がある。

ここに構成された 3 次元等スペクトル系は絡合子の“計量”を  $g_{ij} = \text{diag}(1, -1, 0)$  として得られたものである。これらは  $x_3$  についての任意函数を含まず、 $x_3$  については 4 次に定まっている。(もちろん、2 次元の場合の自明な拡張として、 $x_3$  についての任意函数を含むような系は構成できる。) このような函数形が 4 次に制限されるという状況は、2 次元の場合で、計量が  $g_{ij} = \text{diag}(1, 0)$  の場合にも現れる。<sup>75)</sup> 興味深いのは、 $\beta_{\pm}$  の函数形が  $x_3$  成分との結合により、(4.75) に与えられるものに定まってしまっていることである。2 次元で計量が  $g_{ij} = (1, -1)$  の場合には、 $\beta_{\pm}$  はもっと広いクラスの函数形が可能である。

なおこれらの系は、(4.4) 及びそのエルミート共役の結果、各々対称演算子として  $A^{\dagger}A$ ,  $AA^{\dagger}$  を持っている。しかし 1 次元の場合と異なり、 $A^{\dagger}A$ ,  $AA^{\dagger}$  は一般に  $H$ ,  $\tilde{H}$  によって表すことができない。このため  $A$  のゼロモードとハミルトニアン  $H$  の Schrödinger 方程式の解との関係は明らかではない。準位消失の分析は重要であるが、難しい問題となる。

ここで構成したポテンシャルの物理的重要性は現在のところ明らかではない。我々のポテンシャルを有効に用いて解析できる問題を見いだすことは、将来の課題であるが、直接的な応用を別としても、このような等スペクトル系の構築は場の理論のトイモデルとしても有効であるかも知れない(ただし多重超対称系の場の理論における対応物は今のところ知られていない)。

## おわりに

本稿では超対称量子力学とその多重超対称系への拡張、及び 3 次元空間への拡張理論を見てきた。第 1, 2 節は超対称量子力学とその応用について、第 3 節は超対称量子力学の多重超対称拡張理論についてレビューを行い、最終節では筆者自身による 3 次元拡張研究について報告を行った。

超対称量子力学とは超対称系、すなわち等スペクトル系の分析と構成の手法であり、それはシュレーディンガー方程式の Darboux 変換、さらにその固有値問題の代数的解法である因子分解法をも内包している。因子分解法の記法は若干煩雑であり、級数展開法ほど普及していないのはそのためと考えられる。しかし形状不変性という概念によって超対称量子力学の枠組みに置かれることで、その見通しは著しく改善される(第 2 節)。初等量子力学における教授法としては、今後むしろこの解法が主流になるのではないと思われる<sup>\*)</sup>。

超対称量子力学の基本関係式は絡合関係式  $AH = \tilde{H}A$  であり、絡合子  $A$  は  $A = \partial + w$  の形でスーパーポテンシャル  $w$  を含んでいる(第 1 節)。スーパーポテンシャルの漸近形により、基底状態の“消失”が判定される(第 1.1.5 節)。その挙動が  $\exp(-\int dx w)$  を規格化可能にするものであれば、これは基底状態の波動函数を与え、Darboux 変換が姿を現す。その応用例として、無限井戸型ポテンシャルの超対称パートナーが  $1/\sin^2 x$  の形で得られることを見た(第 1.2.1 節)。

またスーパーポテンシャルとして Riccati 方程式の一般解を用いることにより、調和振動子に対する Abraham-Moses-Pursey ポテンシャルのような、等スペクトル 1 パラメータ族を構成できることを見た(第 1.2.2 節)。

散乱問題についても、超対称系の反射・透過係数は位相だけの違いしかないと示された。デルタ引力ポテンシャルとデルタ斥力ポテンシャルの透過・反射率が等しいこと(第 1.2.3 節)、KdV 方程式のソリトン解を考える上で重要な無反射ポテンシャルがこの一つの応用例として理解されることを見た(第 1.2.4 節)。

運動量について高次の絡合子を考えることにより、新たな等スペクトル系—多重超対称系—が構成される(第 3 節)。通常の超対称系では、準位消失の可能性は基底状態に限られていたが、多重超対称系では励起状態の消失が起こりうるという新しい性質を示す(第 3.1.3 節)。多重超対称系は、通常の超対称系の、さらに超対称なパートナーを考えることで構成することが

<sup>\*)</sup> 実際、我が国の量子力学のテキストにも超対称量子力学について言及するものが現れはじめている<sup>79)</sup>。

可能である。しかし全ての多重超対称系がそのように“可約な”わけではなく、通常の超対称系に帰着できない“既約な”多重超対称系も存在することを確認した（第3.1.4節）。

3次元拡張理論としては、1次絡合子による超対称系と、2次絡合子による2重超対称系を見た（第4節）。3次元超対称系の一つの特徴は、絡合子に角運動量の構造が現れることである。これは1次絡合子の場合でも、2次絡合子の場合でもいえることである。しかし1次絡合子を用いる場合には、本質的に1次元な系からの自明な構成に帰着してしまうことが明らかとなった（第4.1節）。また2次絡合子を用いる3次元2重超対称系を実際に一つ構成してみせた（第4.2節）。

本論文のレビュー部分については、関連論文の幅広いレビューとするよりは、それらを読む上での確固たる基礎を提供できるように心がけた。本論文を読み超対称量子力学に興味を持たれたならば、まずはこの分野の代表的レビューである<sup>18)</sup>、あるいはその書籍版である<sup>19)</sup>を読まれるとよい。そこでは本論文でレビューすることのできなかった応用—変分法、 $\delta$ 展開、二重井戸、ラージ  $N$  展開、SWKB 法などが記述されている。

超対称量子力学の様々な応用に触れられなかった以外にも、心残りは多い。とりわけ、特異点の問題<sup>30)–36)</sup>について検討できなかったのは残念である。

3次元拡張についても、準位消失の問題が未解決で残っており、引き続き研究を重ねていかねばならないと思う。

そして1次元、3次元ともに多重超対称系最大の問題は、それが“問題を待ち続けている解答”の状態にあることである。それが真に役に立つ、現実の物理的問題を見いだす必要がある。

## References

- 1) E. Witten, Nucl. Phys. B **188** (1981), 513.
- 2) A. A. Andrianov, N. V. Borisov and M. V. Ioffe, Phys. Lett. A **105** (1984), 19.
- 3) A. A. Andrianov, N. V. Borisov, M. V. Ioffe and M. I. Eides, Theor. Math. Phys. **61** 1 (1984), 965.
- 4) A. A. Andrianov, N. V. Borisov, M. I. Eides and M. V. Ioffe, Phys. Lett. A **109** (1985), 143.
- 5) M. M. Nieto, Phys. Lett. B **145** (1984), 208.
- 6) C. C. Sukumar, J. Phys. A **18** (1985), L57.
- 7) C. C. Sukumar, J. Phys. A **18** (1985), 2917.
- 8) C. C. Sukumar, J. Phys. A **19** (1986), 2297.
- 9) M. Schmutz, Phys. Lett. A **108** (1985), 195.
- 10) P. Roy and R. Roychoudhury, Phys. Rev. D **33** (1986), 594.
- 11) V. N. Berezovoi and A. I. Pashnev, Theor. Math. Phys. **70** (1987), 102.
- 12) J. J. Boya, Eur. J. Phys. **9** (1988), 140.
- 13) G. Darboux, Comptes Rendus Acad. Sci. **94** (1882), 1456.
- 14) H. C. Rosu, Proc. “Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics”, Burgos, Spain, Sept. 21–24, 1998. quant-ph/9809056.
- 15) L. Infeld, Phys. Rev. **59** (1941), 737.
- 16) L. Infeld, Phys. Rev. **74** (1948), 905.
- 17) L. Infeld and T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23** (1951), 21.
- 18) F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rept. **251** (1995), 267.
- 19) F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, “Supersymmetry in Quantum Mechanics”, World Scientific (2001).
- 20) G. Junker, “Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics”, Springer-Verlag (1996).
- 21) J. K. Bagchi, “Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics”, Chapman & Hall/CRC (2001).
- 22) R. W. Haymaker and A. R. P. Rau, Am. J. Phys. **54** (1986), 928.
- 23) A. Lahiri, P. K. Roy and B. Bagchi, Int. J. Mod. Phys. A **5** (1990), 1383.
- 24) A. A. Andrianov, F. Cannata, J. P. Dedonder and M. V. Ioffe, Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995), 2683.
- 25) D. J. Fernandez C., Int. J. Mod. Phys. A **12** (1997), 171.
- 26) H. Aoyama, H. Kikuchi, I. Okouchi, M. Sato and S. Wada, Nucl. Phys. B **553** (1999), 644.
- 27) M. M. Crum, Quart. J. Math. Oxford. **6** (1955), 121.
- 28) J. O. Organista, M. Nowakowski and H. C. Rosu, J. Math. Phys. **47** (2006), 122104.
- 29) Y. Yamada, Prog. Theor. Phys. **118** (2007), 545.
- 30) P. Roy and R. Roychoudhury, Phys. Rev. D **32** (1985), 1597.
- 31) T. D. Imbo and U. P. Sukhatme, Phys. Rev. D **33** (1986), 3147.
- 32) A. Jevicki and J. P. Rodrigues, Phys. Lett. B **146** (1984), 55.
- 33) J. Fuchs, J. Math. Phys. **27** (1986), 349.
- 34) J. Casahorran and S. Nam, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991), 2729.
- 35) J. Casahorran, Phys. Lett. A **156** (1991), 425.

- 36) P. K. Panigrahi and U. P. Sukhatme, Phys. Lett. A **178** (1993), 251.
- 37) I. F. Márquez, J. Negro and L. M. Nieto, J. Math. Phys. A **31** (1998), 4115.
- 38) P. Abraham and H. Moses, Phys. Rev. A **22** (1980), 1333.
- 39) M. Luban and D. L. Pursey, Phys. Rev. D **33** (1986), 431.
- 40) B. Mielnik, J. Math. Phys. **25** (1984), 3387.
- 41) A. Mitra, P. K. Roy, A. Lahiri and B. Bagchi, Int. J. Theor. Phys. **28** (1989), 911.
- 42) A. Khare and U. P. Sukhatme, Phys. Rev. A **40** (1989), 6185.
- 43) J. Goldstein, C. Lebedzik and R. W. Robinett, Am. J. Phys. **62** (1994), 612.
- 44) L.É. Gendenshtein, JETP Lett. **38** (1984), 356.
- 45) C. A. Singh and T. H. Devi, Phys. Lett. A **171** (1992), 249.
- 46) A. Khare and U. P. Sukhatme, J. Phys. A **21** (1988), L501.
- 47) F. Cooper, J. N. Ginocchio and A. Wipf, Phys. Lett. A **129** (1988), 145.
- 48) R. Dutt, A. Khare and U. P. Sukhatme, Am. J. Phys. **56** (1988), 163.
- 49) A. Stahlhofen, J. Phys. A **22** (1989), 1053.
- 50) J. F. Cariñena and A. Ramos, Rev. Math. Phys. **12** (2000), 1279.
- 51) J. F. Cariñena and A. Ramos, Mod. Phys. Lett. A **15** (2000), 1079.
- 52) A. Khare and U. P. Sukhatme, J. Phys. A **26** (1993), L901.
- 53) D. T. Barclay, R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare, A. Pagnamenta and U. Sukhatme, Phys. Rev. A **48** (1993), 2786.
- 54) 戸田盛和『量子力学 30 講』朝倉書店 (1999), 59.
- 55) P. M. Morse, Phys. Rev. **34** (1929), 57.
- 56) M. M. Nieto and J. M. Simmons, Jr., Phys. Rev. A **19** (1979), 438.
- 57) G. Pöschl and E. Teller, Z. Phys. **83** (1933), 143.
- 58) N. Rosen and P. M. Morse, Phys. Rev. **42** (1932), 210.
- 59) M. M. Nieto, Phys. Rev. A **17** (1978), 1273.
- 60) A. A. Andrianov and M. V. Ioffe, Phys. Lett. A **174** (1993), 273.
- 61) B. F. Samsonov, Phys. Lett. A **263** (1999), 274.
- 62) A. A. Andrianov and A. V. Sokolov, Nucl. Phys. B **660** (2003), 25.
- 63) A. A. Andrianov and F. Cannata, J. Phys. A **37** (2004), 10297.
- 64) M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, Phys. Lett. A **327** (2004), 425.
- 65) D. J. Fernández C., V. Hussin and B. Mielnik, Phys. Lett. A **244** (1998), 309.
- 66) B. Mielnik, L. M. Nieto and O. Rosas-Ortiz, Phys. Lett. A **269** (2000), 70.
- 67) D. J. Fernández C. and E. Salinas-Hernández, J. Phys. A **36** (2003), 2573.
- 68) H. Aoyama, M. Sato, T. Tanaka and M. Yamamoto, Phys. Lett. B **498** (2001), 117.
- 69) H. Aoyama, M. Sato, T. Tanaka, Phys. Lett. B **503** (2001), 423.
- 70) H. Aoyama, M. Sato, T. Tanaka, Nucl. Phys. B **619** (2001), 105.
- 71) M. Sato, T. Tanaka, J. Math. Phys. **43** (2002), 3484.
- 72) A. A. Andrianov, N. V. Borisov and M. V. Ioffe, Theor. Math. Phys. **61** (1984), 1078.
- 73) A. A. Andrianov, M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, Theor. Math. Phys. **104** (1995), 1129.
- 74) A. A. Andrianov, M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, Phys. Lett. A **201** (1995), 103.
- 75) A. A. Andrianov, M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, J. Phys. A **32** (1999), 4641.
- 76) F. Cannata, M. V. Ioffe and D. N. Nishnianidze, J. Phys. A **35** (2002), 1389.
- 77) M. V. Ioffe, J. Phys. A **37** (2004), 10363.
- 78) M. V. Ioffe and P. A. Valinevich, J. Phys. A **38** (2005), 2497.
- 79) 倉本義夫・江澤潤『量子力学』朝倉書店 (2008), 178.